EA616 – Análise Linear de Sistemas

Aula: O critério de Routh-Hurwitz

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Concurso de Livre Docência – 01/03/2023

Apresentação da Aula e Objetivos

- Motivar e apresentar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.
- Aprender a operar o critério.
- Compreender os principais conceitos utilizados na elaboração do critério
- Apresentar aplicações e extensões.

Estabilidade

Definição 1

*Um sistema é BIBO estável (*Bounded-Input Bounded-Output*) se a saída $y(t)$ é limitada para toda entrada $x(t)$ limitada.*

$$|x(t)| < b \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < +\infty$$

Teorema 1

Um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência racional

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \; , \; \Omega_h = \{s \in \mathbb{C} \; , \; Re(s) > \sigma\} \; , \; \sigma = \max_k Re(\lambda_k)$$

é BIBO estável se e somente se todos os polos λ_k (isto é, raízes de $D(s) = 0$) tiverem parte real negativa.

Por Que Não Simplesmente Calcular as Raízes?

- Com os computadores e métodos numéricos disponíveis na atualidade, por que não simplesmente calcular as raízes do polinômio $D(s)$ para concluir sobre sua estabilidade?

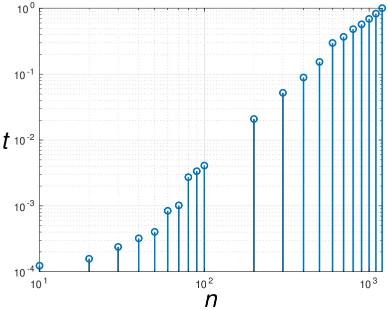


Figura 1: Tempo computacional médio para calcular as raízes de um polinômio de ordem n usando a função `roots` do Matlab. Os eixos estão escalas logarítmicas.

Método Indireto

- Embora o cálculo das raízes possa parecer uma opção atraente em princípio, até o final desta aula são oferecidos motivos que justificam a adoção de um método que não é baseado no cálculo das raízes de $D(s)$ para concluir sobre a estabilidade. Tal técnica é classificada como um método indireto de estabilidade.

- É importante lembrar que os primeiros métodos de estabilidade surgiram no século 19, ou seja, bem antes dos computadores.

Às vezes, é fácil concluir sobre a instabilidade

Definição 2

Um polinômio $D(s)$ que possui todas as raízes com parte real negativa é chamado de polinômio Hurwitz.

Teorema 2

Uma condição necessária para que o polinômio de grau n

$$D(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

seja Hurwitz, é que todos os coeficientes sejam não nulos e tenham os mesmos sinais.

Prova: O polinômio $D(s)$ pode ser fatorado na forma

$$D(s) = \alpha_n \prod_k (s + a_k) \prod_k (s^2 + 2b_k s + b_k^2 + c_k^2)$$

sendo $-a_k$ as raízes reais e $-b_k \pm jc_k$ as raízes complexas. Consequentemente, se

$$a_k > 0, \quad b_k > 0$$

então todos os coeficientes de $D(s)$ são positivos.

Exemplo

- Considere os polinômios

$D(s)$	fatoração
s^3+0s^2+8s+9	$(s+1)(s^2-s+9)$
s^3+4s^2+s-6	$(s-1)(s+2)(s+3)$
s^3+3s^2+s+3	$(s^2+1)(s+3)$

- O último exemplo mostra que existem polinômios que não são Hurwitz mas que possuem todos os coeficientes positivos.

- Nesses casos é necessário um teste que também seja suficiente para a estabilidade (e não apenas necessário).

- Dentre as opções disponíveis, apresenta-se a condição de estabilidade (ou critério) de Routh-Hurwitz.

Critério de Routh-Hurwitz

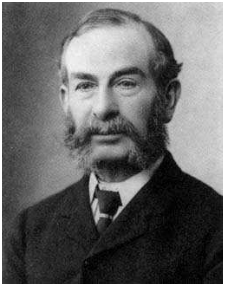


Figura 2: Edward John Routh, 1831–1907. Fonte: Wikipedia

- Em 1877, Edward J. Routh propôs um critério de estabilidade no trabalho

  E. J. Routh, A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion. Macmillan and Company, 1877.

- Em 1895, de maneira independente, Adolf Hurwitz propôs um teste equivalente, baseado no cômputo de determinantes.

A Tabela de Routh

- A técnica proposta por Routh consiste em construir uma tabela, a partir da qual é possível saber se um determinado polinômio é Hurwitz, isto é, se todas as suas raízes têm parte real negativa.

- Considere o polinômio

$$D(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Antes de apresentar a tabela de Routh (próximo slide), considere a decomposição de um polinômio $p(s)$ de grau arbitrário na forma

$$p(s) = p_{par}(s) + p_{imp}(s)$$

em que $p_{par}(s)$ é um polinômio par (contém somente potências pares de s) e $p_{imp}(s)$ é um polinômio ímpar (contém somente potências ímpares de s). Exemplo:

$$\underbrace{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}_{p(s)} = \underbrace{s^3 + 3s}_{p_{imp}(s)} + \underbrace{2s^2 + 4}_{p_{par}(s)}$$

Tabela de Routh

$$D(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

s^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	α_{n-6}	$\cdots$
s^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	$\cdots$	$\cdots$
s^{n-2}	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
s^0	α_0				

As duas primeiras linhas são construídas por inspeção do polinômio $D(s)$ (partes par e ímpar). A terceira linha é calculada como mostrado a seguir:

$$x_1 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} = -\alpha_{n-1}^{-1} \det \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} = -\alpha_{n-1}^{-1} \det \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-5} \end{bmatrix}$$

e assim por diante. O cálculo é repetido para as linhas subsequentes s^k, tomando s^{k-2} e s^{k-1}, até k chegar em zero. Se nenhum elemento da primeira coluna for nulo, então o caso é chamado de *regular*. Caso contrário o caso é chamado de *singular* e o algoritmo é interrompido precocemente (mais detalhes são fornecidos mais adiante).

Tabela de Routh

$$D(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

s^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	α_{n-6}	$\cdots$
s^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	$\cdots$	$\cdots$
s^{n-2}	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
s^0	α_0				

As duas primeiras linhas são construídas por inspeção do polinômio $D(s)$ (partes par e ímpar). A terceira linha é calculada como mostrado a seguir:

$$x_1 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} = -\alpha_{n-1}^{-1} \det \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} = -\alpha_{n-1}^{-1} \det \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-5} \end{bmatrix}$$

e assim por diante. O cálculo é repetido para as linhas subsequentes s^k, tomando s^{k-2} e s^{k-1}, até k chegar em zero. Se nenhum elemento da primeira coluna for nulo, então o caso é chamado de *regular*. Caso contrário o caso é chamado de *singular* e o algoritmo é interrompido precocemente (mais detalhes são fornecidos mais adiante).

Tabela de Routh

$$D(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \cdots & \cdots \\
s^{n-2} & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^0 & \alpha_0 & & & &
\end{array}$$

As duas primeiras linhas são construídas por inspeção do polinômio $D(s)$ (partes par e ímpar). A terceira linha é calculada como mostrado a seguir:

$$x_1 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} = -\alpha_{n-1}^{-1} \det \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} = -\alpha_{n-1}^{-1} \det \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-5} \end{bmatrix}$$

e assim por diante. O cálculo é repetido para as linhas subsequentes s^k, tomando s^{k-2} e s^{k-1}, até k chegar em zero. Se nenhum elemento da primeira coluna for nulo, então o caso é chamado de *regular*. Caso contrário o caso é chamado de *singular* e o algoritmo é interrompido precocemente (mais detalhes são fornecidos mais adiante).

Condição de Estabilidade

- O teorema apresentado a seguir é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade Hurwitz do polinômio $D(s)$, e é baseado na Tabela de Routh.

Teorema 3

As raízes de $D(s)$ estão no semi-plano esquerdo ($Re(s) < 0$) se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna da Tabela de Routh associada a $D(s)$ são não nulos e possuem o mesmo sinal.

- O critério de Routh permite não apenas concluir se $D(s)$ é Hurwitz ou não. O número de raízes no semi-plano direito é igual ao número de trocas de sinais dos elementos da primeira coluna da tabela.

Condição de Estabilidade

- O teorema apresentado a seguir é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade Hurwitz do polinômio $D(s)$, e é baseado na Tabela de Routh.

Teorema 3

As raízes de $D(s)$ estão no semi-plano esquerdo ($Re(s) < 0$) se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna da Tabela de Routh associada a $D(s)$ são não nulos e possuem o mesmo sinal.

- O critério de Routh permite não apenas concluir se $D(s)$ é Hurwitz ou não. O número de raízes no semi-plano direito é igual ao número de trocas de sinais dos elementos da primeira coluna da tabela.

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	x_1	x_2	0

$$x_1 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix}1 & 5\\4 & 4\end{bmatrix} = 4$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix}1 & 8\\4 & 8\end{bmatrix} = 6$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	x_1	x_2	0

$$x_1 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & 4\end{bmatrix} = 4$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix}1 & 8\\ 4 & 8\end{bmatrix} = 6$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	x_1	x_2	

$$x_1 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 8$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	x_1	x_2	

$$x_1 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 8$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	-2	8	
s^1	x_1		

$$x_1 = -\frac{1}{-2}\det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = 22$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	-2	8	
s^1	x_1		

$$x_1 = -\frac{1}{-2}\det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = 22$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	-2	8	
s^1	22		
s^0	x_1		

$$x_1 = \alpha_0 = 8$$

- Ocorreram duas trocas de sinais na primeira coluna (de s^3 para s^2 e de s^2 para s^1). Portanto existem duas raízes no semi-plano direito. De fato,

$$D(s) = (s - 0{,}51 + 1{,}12j)(s - 0{,}51 - 1{,}12j)(s+2)(s + 1{,}51 + 0{,}54j)(s + 1{,}51 - 0{,}54j)$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	-2	8	
s^1	22		
s^0	x_1		

$$x_1 = \alpha_0 = 8$$

- Ocorreram duas trocas de sinais na primeira coluna (de s^3 para s^2 e de s^2 para s^1). Portanto existem duas raízes no semi-plano direito. De fato,

$$D(s) = (s - 0{,}51 + 1{,}12j)(s - 0{,}51 - 1{,}12j)(s+2)(s+1{,}51+0{,}54j)(s+1{,}51-0{,}54j)$$

Exemplo

- Seja o polinômio $D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 8s + 8$.

s^5	1	5	8
s^4	4	4	8
s^3	4	6	0
s^2	-2	8	
s^1	22		
s^0	x_1		

$$x_1 = \alpha_0 = 8$$

- Ocorreram duas trocas de sinais na primeira coluna (de s^3 para s^2 e de s^2 para s^1). Portanto existem duas raízes no semi-plano direito. De fato,

$$D(s) = (s - 0{,}51 + 1{,}12j)(s - 0{,}51 - 1{,}12j)(s+2)(s+1{,}51+0{,}54j)(s+1{,}51-0{,}54j)$$

Demonstração da Validade do Critério de Routh-Hurwitz

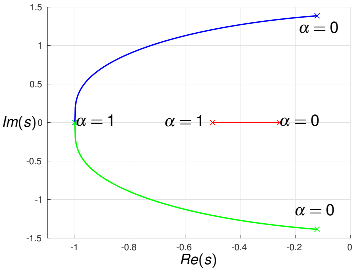
- A técnica baseada na tabela de Routh continuou sendo investigada ao longo do tempo, com trabalhos que tentavam aprimorar o tratamento dos casos singulares e fornecer provas mais simples. O artigo [Mei95] traz uma prova relativamente simples de ser entendida (com um aprimoramento na apresentação dado em [Bod20]).

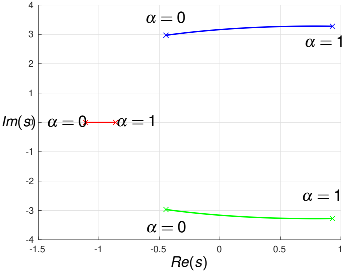
- A apresentação da prova é dividida em três etapas:
  1. Definições e recapitulação de conceitos;
  2. Melhor compreensão dos elementos presentes na tabela;
  3. Propriedade que permite provar o critério de estabilidade;
  4. Prova da propriedade.

Recapitulação e Definições

- Um polinômio par $p(s)$ é tal que $p(j\omega)$ é um número puramente real. Exemplo: $p(s) = s^4 + s^2 + 1$, $p(j\omega) = \omega^4 - \omega^2 + 1$;
- Um polinômio ímpar é tal que $p_{imp}(j\omega)$ é puramente imaginário. Exemplo: $p(s) = s^3 + s$, $p(j\omega) = (\omega - \omega^3)j$;
- Raízes de polinômios pares: $\pm jb$, $\pm a$, ou $\pm a \pm bj$. Caso ímpar: as mesmas mais uma raíz nula ($p_{imp}(s) = p_{par}(s)s$);
- Sobre o produto de polinômios: $\begin{array}{ll} \text{par} \times \text{par} & = \text{par} \\ \text{ímpar} \times \text{ímpar} & = \text{par} \\ \text{ímpar} \times \text{par} & = \text{ímpar} \end{array}$
- Inércia de um polinômio $p(s)$: $(n_-(p), n_0(p), n_+(p))$. Exemplo: $p(s) = (s+1)(s-1)s \Rightarrow (n_-(p), n_0(p), n_+(p)) = (1,1,1)$;
- As raízes de um polinômio $p(s)$ são funções contínuas de seus coeficientes [Mar66].

Continuidade das Raízes





Raízes de

$$p(s) = s^3 + (1+\alpha)s^2 + 4s + 1, \quad \alpha \in [0,\, 1]$$

Raízes de

$$p(s) = s^3 + (2-3\alpha)s^2 + 10s + 10, \quad \alpha \in [0,\, 1]$$

Etapa 1: Compreendo Melhor a Tabela I

- Considere o polinômio $p(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 5s + 1$

Tabela de Routh			
s^5	1	5	5
s^4	1	3	1
s^3	2	4	0
s^2	1	1	0
s^1	2	0	0
s^0	1	0	0

Um primeiro ponto para ser observado sobre a tabela de Routh é que a linha s^k, $k = 3, \ldots, n+1$ é o resto da divisão dos polinômios das linhas s^{k-2} e s^{k-1}. De fato, da linha referente a s^3, tem-se

$$\begin{array}{l|l} s^5 + 5s^3 + 5s & s^4 + 3s^2 + 1 \\ \cline{2-2} -s^5 - 3s^2 - s & s \\ \hline 2s^3 + 4s & \end{array}, \quad 2 = -\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; 4 = -\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Etapa 1: Compreendo Melhor a Tabela II

De modo genérico, o polinômio da linha s^k, definido como $p_k(s)$ pode ser obtido pela recorrência

$$p_{k+2}(s) = p_k(s) - q_k(s)p_{k+1}(s),\ k = 1, \ldots, n-1$$

com $p_1(s)$ e $p_2(s)$ obtidos diretamente do polinômio original. Todos os polinômios $p_k(s)$ são da forma

$$p_k(s) = c_k s^{n-k+1} + \cdots$$

sendo c_k o coeficiente da primeira coluna com $c_1 = a_n$ e $c_2 = a_{n-1}$. Além disso, o polinômio quociente $q_k(s)$ é dado por

$$q_k(s) = \frac{c_k}{c_{k+1}} s,\ k = 1, \ldots, n-1$$

Se não ocorre nenhum c_k nulo, então os dois últimos polinômios são $p_n(s) = c_n s$ e $p_{n+1}(s) = c_{n+1} = a_0$.

Etapa 1: Compreendo Melhor a Tabela III

- A condição de estabilidade baseada na tabela Routh é dada em função de cálculos algébricos sobre os coeficientes de polinômios. Contudo, para compreender a condição, é necessário re-analisar os resultados em termos de polinômios.

- Lembre-se que as duas primeiras linhas da tabela combinadas geram o polinômio original, isto é, $p(s) = p_1(s) + p_2(s)$. Além disso, quaisquer duas linhas consecutivas também geram polinômios $p_k(s) + p_{k+1}(s)$ que são importantes para o desenvolvimento do critério de estabilidade.

Para o exemplo anterior, temos os seguintes polinômios

$$\begin{array}{ll} p_1(s)+p_2(s): & s^5+s^4+5s^3+3s^2+5s+1 \\ p_2(s)+p_3(s): & s^4+2s^3+3s^2+4s+1 \\ p_3(s)+p_4(s): & 2s^3+s^2+4s+1 \\ p_4(s)+p_5(s): & s^2+2s+1 \\ p_5(s)+p_6(s): & 2s+1 \end{array}$$

Etapa 1: Compreendo Melhor a Tabela IV

- Elemento chave na prova do critério: estabelecer uma relação entre a inércia de dois polinômios consecutivos

$$\begin{gathered} p_k(s) + p_{k+1}(s) \\ p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s) \end{gathered}$$

Lógica: A partir do último polinômio (no exemplo, $p_5(s) + p_6(s)$), seria possível, de forma indutiva, concluir sobre o primeiro polinômio ($p_1(s) + p_2(s) = p(s)$).

- Por questões de facilidade da apresentação da prova, é interessante investigar a relação entre os seguintes polinômios

$$\begin{gathered} p_k(s) + p_{k+1}(s) \\ (p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s))(1 + q_k(s)) \end{gathered}$$

pois possuem o mesmo grau, e $(1 + q_k(s))$ é um polinômio conhecido (os c_k são conhecidos).

Etapa 2: Propriedade: Invariância do n^o de Raízes Imaginárias I

- O resultado apresentado a seguir é a propriedade essencial do critério de Routh-Hurwitz, estabelecendo uma relação entre as raízes de quaisquer dois polinômios consecutivos $p_k(s) + p_{k+1}(s)$.

Propriedade

Assuma que $c_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$. O número de raízes de

$$p_k(s) + p_{k+1}(s)$$

com parte real negativa (positiva) é igual ao número de raízes de

$$(1 + q_k(s))(p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s))$$

com parte real negativa (positiva). As raízes com parte real nula são as mesmas em ambos os polinômios, incluindo suas multiplicidades.

A partir da propriedade apresentada, é imediato verificar o motivo pelo qual o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz é capaz de atestar (de maneira conclusiva) se um determinado polinômio é Hurwitz. Note que o último polinômio obtido a partir da tabela é sempre dado por $k = n - 1$, isto é,

Etapa 2: Propriedade: Invariância do n^o de Raízes Imaginárias II

$p_n(s) + p_{n+1}(s) = c_n s + c_{n+1}$, que garantidamente é Hurwitz (raiz igual a $-c_{n+1}/c_n$). Como

$$1 + q_{n-1}(s) = 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} s = (c_{n-1} s + c_n)/c_n$$

com raiz dada por $-c_n/c_{n-1}$, tem-se que polinômio

$$(1 + q_{n-1}(s))(p_n(s) + p_{n+1}(s))$$

é Hurwitz e, portanto, polinômio da linha anterior, $p_{n-1}(s) + p_n(s)$ também é, e assim sucessivamente até a primeira linha, $p_1(s) + p_2(s) = p(s)$, polinômio de interesse.

Etapa 3: Prova da Propriedade I

Prova da Propriedade: Considere o polinômio

$$\begin{aligned} d_k(s,\alpha) &= p_k(s) + p_{k+1}(s) + \alpha q_k(s) p_{k+2}(s) \\ &= p_{k+2}(s) + q_k(s) p_{k+1}(s) + p_{k+1}(s) + \alpha q_k(s) p_{k+2}(s) \end{aligned}$$

com $\alpha \in [0,1]$. Avaliando $d_k(s,\alpha)$ nos extremos de α, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha = 0, &\quad d_k(s,0) = p_k(s) + p_{k+1}(s) \\ \alpha = 1, &\quad d_k(s,1) = (1 + q_k(s))(p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s)) \end{aligned}$$

O polinômio $d_k(s,\alpha)$ sempre tem grau $n-k+1$ (ditado pela parcela $p_k(s)$), e para α variando continuamente em seu intervalo, tem-se uma variação contínua entre as raízes de $d_k(s,0)$ e $d_k(s,1)$.

Note que o polinômio $d_k(s,\alpha)$ tem raízes sobre o eixo imaginário se, e somente se, para algum ω_0

$$p_{k+2}(j\omega_0) + q_k(j\omega_0) p_{k+1}(j\omega_0) + p_{k+1}(j\omega_0) + \alpha q_k(j\omega_0) p_{k+2}(j\omega_0) = 0$$

Etapa 3: Prova da Propriedade II

Como os polinômios $p_k(s)$ alternam-se entre polinômios pares e ímpares, e levando em conta que $q_k(s)$ é impar, a equação anterior pode ser dividida entre partes real e imaginária

$$
\begin{aligned}
p_{k+2}(j\omega_0) + q_k(j\omega_0)p_{k+1}(j\omega_0) &= 0 \\
p_{k+1}(j\omega_0) + \alpha q_k(j\omega_0)p_{k+2}(j\omega_0) &= 0
\end{aligned}
$$

que leva a

$$(1 - \alpha q_k(j\omega_0)^2)p_{k+2}(j\omega_0) = 0$$

A partir do fato

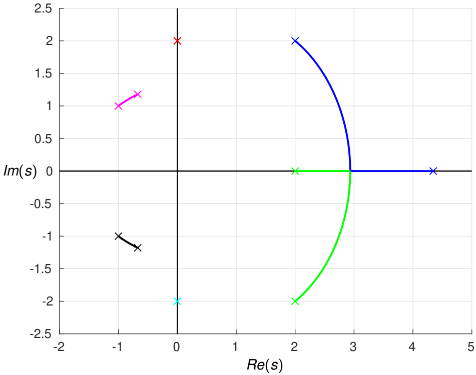
$$1 - \alpha q_k(j\omega_0)^2 = 1 + \alpha((c_k\omega_0)/c_{k+1})^2 \geq 1$$

conclui-se que $p_{k+2}(j\omega_0) = p_{k+1}(j\omega_0) = 0$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Assim, qualquer raiz de $d_k(s,\alpha)$ sobre o eixo imaginário para algum α, é uma raiz de $p_k(s) + p_{k+1}(s)$, uma raiz de $p_{k+1}(s) + p_{k+2}(s)$ e uma raiz de $d_k(s,\alpha)$ para todo α. Assim raízes imaginárias permanecem em suas posições e nenhuma raiz de $d_k(s,\alpha)$ pode se deslocar do semi-plano esquerdo ou direito para o eixo imaginário. Como consequência final, nenhuma raiz pode se deslocar do semi-plano esquerdo para o direito e vice-versa, concluindo a prova.

Exemplo

$$d_k(s,\alpha) = \underbrace{s^6+6s^4+24s^2+64}_{p_1(s)} - \underbrace{2s^5+32s}_{p_2(s)} - \alpha\frac{s}{2}\underbrace{(6s^4+40s^2+64)}_{p_3(s)},\ \alpha\in[0,1]$$

$$(n_-(p), n_0(p), n_+(p)) = (2,2,2),\ \forall\alpha$$



Casos Singulares

- O procedimento no caso regular termina se algum coeficiente c_k for nulo. Dois casos, chamados de *singulares*, podem ocorrer.

- Caso 1: Tem-se $c_k = 0$, mas a linha correspondente não é totalmente nula. A divisão polinomial ainda é viável, mas o polinômio quociente q_k será de grau três (ou maior se houverem mais zeros na linha). Assim, a soma das raízes de $(1 + q_k)$ (sempre informada pelo segundo coeficiente) é nula, e portanto garantidamente há raízes fora do semi-plano esquerdo.

- Caso 2: uma linha da tabela é totalmente nula, portanto $p_{k+2} = 0$ e o polinômio $p_{k+1} + p_{k+2} = p_{k+1}$, sendo um polinômio ímpar ou par. Garantidamente nem todas as raízes de $p_{k+1} + p_{k+2}$ estão no semi-plano esquerdo.

Cálculo de Ganhos de Controle

- Considere uma planta linear invariante no tempo descrita pela função de transferência $G(s) = 4s/(4s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 5)$ em um esquema de realimentação unitária com um ganho de controle k, gerando como polinômio do denominador da planta em malha fechada:

$$D(s,k) = 4s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 4ks + 5$$

O problema consiste em determinar faixas de valores para k tal que o sistema seja estável. A tabela de Routh é útil para resolver esse problema. Computando a tabela, tem-se

s^4	4	12	5
s^3	8	4k	0
s^2	12-2k	5	0
s^1	Ψ		
s^0	8		

com $\Psi = ((12-2k)4k-40)/(12-2k)$.

Continuação do Exemplo

- Para que a primeira coluna tenha apenas componentes positivas, tem-se

$$12 - 2k > 0 \Rightarrow k < 6$$

e

$$-8k^2 + 48k - 40 > 0 \Rightarrow 1 < k < 5$$

Portanto, a faixa de ganhos estabilizantes é $1 < k < 5$.

- Este exemplo mostra uma das vantagens de trabalhar-se com uma técnica indireta de estabilidade.

O Critério de Routh-Hurwitz Pode Tratar Incertezas

- Nesta seção é apresentada mais uma justificativa que fortalece a escolha de uma técnica indireta de estabilidade.

- Em particular, investiga-se a estabilidade de polinômios em que os coeficientes não são precisamente conhecidos, mas incertos. Nesse cenário, tem-se um problema de análise de estabilidade robusta.

- Por exemplo, considere o polinômio

$$D(s,a,b) = s^3 + bs^2 + as + 9$$

em que a e b não são precisamente conhecidos, mas pertencem às faixas

$$a \in [9{,}5 \;\; 10{,}5], \quad b \in [1, \;\; 1{,}5]$$

- Parâmetros incertos podem aparecer devido a incertezas nos valores dos dados do sistema (massas, coeficientes da atrito, resistores, capacitores, etc.), às técnicas de identificação ou linearizações em mais de um ponto de operação.

Tabela de Routh com Coeficientes Incertos

- Uma representação conveniente de a e b é dada por

$$a = \alpha_1 9{,}5 + 10{,}5\alpha_2, \quad b = \beta_1 + 1{,}5\beta_2$$

com α_1, α_2, β_1 e β_2 números reais que satisfazem

$$\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \beta_1 + \beta_2 = 1$$

Construindo a Tabela de Routh, tem-se

s^3	1	a
s^2	b	9
s^1	$\frac{ab-9}{b}$	
s^0	9	

Continuação do Exemplo

Para que o polinômio $D(s,a,b)$ seja Hurwitz, é necessário e suficiente que

$$p(\beta) = \beta_1 + 1{,}5\beta_2 > 0 \qquad q(\alpha,\beta) = \frac{19}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{57}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{21}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{63}{4}\alpha_2\beta_2 - 9$$

É imediato concluir que $p(\beta)$ é positivo em função dos valores que β_1 e β_2 podem assumir.

Com relação ao polinômio $q(\alpha,\beta)$, a presença do termo -9 demanda uma análise mais cautelosa. Notando que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\beta_1 + \beta_2 = 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
q(\alpha,\beta) &= \frac{19}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{57}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{21}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{63}{4}\alpha_2\beta_2 - 9 \\
q(\alpha,\beta) &= \frac{19}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{57}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{21}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{63}{4}\alpha_2\beta_2 - 9(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{21}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{3}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{27}{4}\alpha_2\beta_2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Continuação do Exemplo

Para que o polinômio $D(s,a,b)$ seja Hurwitz, é necessário e suficiente que

$$p(\beta) = \beta_1 + 1{,}5\beta_2 > 0 \qquad q(\alpha,\beta) = \frac{19}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{57}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{21}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{63}{4}\alpha_2\beta_2 - 9$$

É imediato concluir que $p(\beta)$ é positivo em função dos valores que β_1 e β_2 podem assumir.

Com relação ao polinômio $q(\alpha,\beta)$, a presença do termo -9 demanda uma análise mais cautelosa. Notando que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\beta_1 + \beta_2 = 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
q(\alpha,\beta) &= \frac{19}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{57}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{21}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{63}{4}\alpha_2\beta_2 - 9 \\
q(\alpha,\beta) &= \frac{19}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{57}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{21}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{63}{4}\alpha_2\beta_2 - 9(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{21}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{3}{2}\alpha_2\beta_1 + \frac{27}{4}\alpha_2\beta_2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Conclusão do Exemplo I

- Resultado da análise (robusta): A tabela de Routh de $D(s,a,b)$ tem sua primeira coluna positiva para todo a e b pertencentes às suas faixas, portanto

$D(s,a,b)$ é robustamente estável

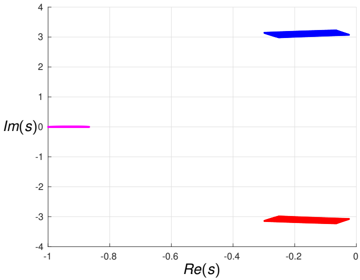


Figura 3: Raízes de $D(s,a,b) = s^3 + bs^2 + as + 9$ com $a \in [9{,}5 \;\; 10{,}5], \quad b \in [1, \;\; 1{,}5]$.

Conclusão do Exemplo II

- Note que o cálculo de raízes como condição de estabilidade não é viável neste caso, pois os coeficientes do polinômio não são conhecidos.

- Como generalização, o critério de Routh pode ser adaptado para o caso de parâmetros incertos desde que técnicas de certificação de positividade de polinômios estejam disponíveis.

- Determinar se um polinômio é positivo em geral não é um problema que possar ser resolvido de forma eficiente.

Referências Bibliográficas I

- I. S. Bonatti, A. Lopes, P. L. D. Peres, and C. M. Agulhari.
  Linearidade em Sinais e Sistemas.
  Editora Blucher, 2016.
- M. Bodson.
  Explaining the Routh–Hurwitz criterion: A tutorial presentation.
  IEEE Control Systems Magazine, 40(1):45–51, February 2020.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, and J. D. Powell.
  Feedback Control of Dynamic Systems, volume 4.
  Prentice Hall Upper Saddle River, 2002.
- M. Marden.
  Geometry of polynomials.
  American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 2 edition, 1966.

Referências Bibliográficas II

G. Meinsma.
Elementary proof of the Routh-Hurwitz test.
Systems & Control Letters, 25(4):237–242, July 1995.

K. Ogata.
Modern Control Engineering.
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1990.