Análise e Controle de Sistemas Lineares Incertos Por Meio de Desigualdades Matriciais Lineares

Ricardo C.L.F. Oliveira & Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
http://www.dt.fee.unicamp.br/~peres

12 de Setembro 2010

Tópicos

Resumo

Objetivos

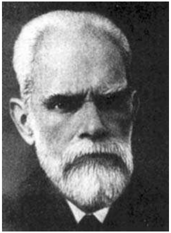
- Análise e controle de sistemas lineares usando métodos de otimização baseados em desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities – LMIs*);
- Problemas convexos;
- Condições de Lyapunov para a estabilidade, normas $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$;
- Determinação de um ganho estabilizante de realimentação de estados.

Ênfase

- Exemplos de aplicações (Matlab);

Lyapunov (1)

- Segundo o *The MacTutor History of Mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html`, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) foi colega e contemporâneo de Andrei Andreyevich Markov (1856–1922) na Universidade de São Petersburgo, tendo ambos trabalhado com Pafnuti Lvovich Tchebychev (1821–1894). Lyapunov apresentou a tese de doutorado *The general problem of the stability of motion* em 1892 à Universidade de Moscou.

Três momentos de Lyapunov.

Lyapunov (2)

- O chamado teorema de Lyapunov, adaptado para o caso de sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de LMIs.

Teorema de Lyapunov

As trajetórias de $\dot{x} = Ax$ convergem para a origem se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que $A'P + PA < 0$. Nesse caso, diz-se que o sistema (ou simplesmente, a matriz A) é assintoticamente estável.

Condições LMIs para Estabilidade

- As LMIs do teorema podem ser obtidas diretamente a partir da função quadrática $v(x) = x'Px$ impondo-se $v(x) > 0$ e $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ tal que $\dot{x} = Ax$.

- Note que a desigualdade $A'P + PA < 0$ exige que a matriz simétrica $A'P + PA$ seja definida negativa, assim como $P > 0$ deve ser simétrica e definida positiva. Uma matriz $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se

$$x'Px > 0, \quad \forall x \neq 0$$

o que implica que todos os autovalores (ou que todos os menores principais líderes) de P devem ser positivos.

- Assim, $A'P + PA$ é definida negativa se $-(A'P + PA) > 0$.

Exemplo — Condições LMIs para Estabilidade (1)

- Por exemplo, considere o sistema linear

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x \qquad (1)$$

e a matriz de Lyapunov simétrica

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

a determinar. As LMIs do Teorema de Lyapunov, $P > 0$ e $A'P + PA < 0$ podem ser escritas em termos das incógnitas do problema, p_1, p_2 e p_3, ou seja, o sistema é assintoticamentes estável se e somente se existirem p_1, p_2 e p_3 reais tais que

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_3 > 0$$

$$A'P + PA = \begin{bmatrix} -4p_2 & p_1 - 3p_2 - 2p_3 \\ p_1 - 3p_2 - 2p_3 & 2p_2 - 6p_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} p_3 < 0$$

Exemplo — Condições LMIs para Estabilidade (2)

- As restrições podem ser colocadas em termos dos menores principais líderes de P e de $-(A'P+PA)$, resultando em

$$p_1 > 0,\ p_3 > 0,\ p_1 p_3 - p_2^2 > 0,\ 4p_2 > 0,\ 6p_3 - 2p_2 > 0,$$
$$(4p_2)(6p_3 - 2p_2) - (3p_2 + 2p_3 - p_1)^2 > 0 \quad (2)$$

- A Figura a seguir ilustra graficamente estas restrições, que delimitam uma região convexa e ilimitada. Os contornos em vermelho indicam que a região é ilimitada nessas direções.

Exemplo — Condições LMIs para Estabilidade (3)

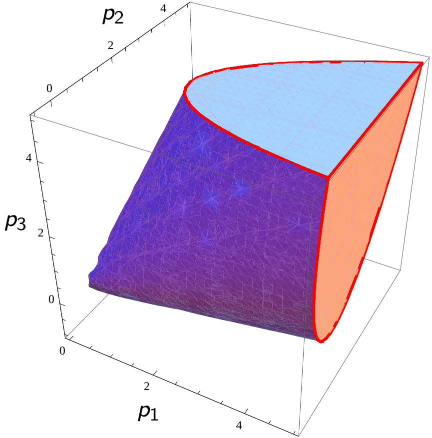


Figura: Região de factibilidade associada às restrições (2).

Exemplo — Condições LMIs para Estabilidade (4)

- Note que as LMIs associadas ao Teorema de Lyapunov podem ser resolvidas explicitamente. Para isso, escolhe-se uma matriz simétrica definida positiva Q arbitrária e resolve-se a equação linear (por exemplo, com o comando `P=lyap(A',eye(2))` do Matlab)

$$A'P + PA + Q = 0$$

A solução P é definida positiva se e somente se o sistema for estável. No exemplo acima, escolhendo $Q = \mathrm{I}$, tem-se a solução

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Minha primeira LMI

Equação de Lyapunov

A solução da equação de Lyapunov pode também ser obtida por meio de um procedimento de otimização envolvendo LMIs. Definindo $\mathrm{Tr}(P)$ como o traço da matriz P (isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de P), dadas as matrizes A e $Q = Q' > 0$, resolva

$$\min_{P} \mathrm{Tr}(P) \tag{3}$$

$$P > 0, \qquad A'P + PA + Q < 0 \tag{4}$$

- A minimização do traço leva a solução para o mais próximo possível da igualdade (dentro da precisão numérica do resolvedor de LMIs). Uma solução definida positiva P existe sempre que A for assintoticamente estável. Note que $\mathrm{Tr}(P)$ é uma função linear dos elementos da matriz P e, portanto, o problema é convexo (minimização de uma função objetivo linear com restrições que definem um conjunto convexo).

Exercício

Histórico (1)

- Aplicações relacionadas com o método de Lyapunov (Lur'e, Postnikov) em estabilidade de um sistema de controle com não-linearidades no atuador (1940's); Lema de positividade real (Yakubovich, Popov, Kalman), relação com passividade, teorema do ganho pequeno, critério linear quadrático, solução por meio de equações algébricas de Riccati, 1960's; e outros mais, principalmente na antiga União Soviética.

- A primeira menção explícita de uma LMI é atribuída a J. C. Willems (1971), em um artigo que apresenta a LMI abaixo

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+Q & PB+C' \\ B'P+C & R \end{bmatrix} \geq 0$$

que pode ser resolvida (P é a variável, e as matrizes A, B, C, Q e R são conhecidas) estudando-se as soluções simétricas da equação algébrica de Riccati

$$A'P+PA-(PB+C')R^{-1}(B'P+C)+Q=0$$

Histórico (2)

- Embora existam diversas LMIs que podem ser resolvidas a partir de equações, nem sempre é este o caso.

- Por exemplo, dadas as matrizes A_1 e A_2, encontrar P tal que

$$P > 0 \ , \qquad A_1' P + P A_1 < 0 \ , \qquad A_2' P + P A_2 < 0$$

é um problema que não possui solução explícita. No entanto, trata-se de um problema convexo, que pode ser resolvido numericamente de maneira simples, com convergência garantida.

Histórico (3)

Comentários

- Problemas descritos por LMIs são problemas convexos de otimização;
- Se um problema pode ser convertido em LMIs, considera-se que o problema está resolvido;
- Existem algoritmos com convergência global para a resolução de problemas de otimização descritos por LMIs: elipsóide, projeção, planos de corte, método dos pontos interiores, desenvolvidos principalmente nos anos 1980's;
- O método dos pontos interiores possui complexidade polinomial, ou seja, a complexidade aumenta proporcionalmente ao número de variáveis e de linhas de LMIs elevados a uma certa potência;
- Existem pacotes computacionais especializados (chamados genericamente de programação semi-definida) para a resolução de LMIs;
- Existem interpretadores (ou *parsers*) para a formulação de problemas em termos de LMIs;
- Embora computadores e algoritmos estejam em constante evolução, os resolvedores atuais estão limitados a tratar problemas com no máximo alguns milhares de variáveis e de linhas de LMIs.

Histórico (4)

Comentários (cont.)

- Nos últimos 30 anos, inúmeros problemas de análise de estabilidade de sistemas dinâmicos e de projetos de controladores e de filtros foram colocados na forma de LMIs;
- Em particular, as LMIs foram bastante utilizadas em sistemas com incertezas paramétricas, proporcionando métodos de análise de estabilidade, controle e filtragem robustos, e também no tratamento de modelos com saturações, não-linearidades, no projeto de controladores e filtros escalonados *gain-scheduling*, etc.;
- Recomenda-se vivamente a leitura do livro *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Boyd *et al.* (1994), e do Capítulo 7 da Enciclopédia de Automática, Controle & Automação, Vol. 1, Desigualdades matriciais lineares em controle.

Preliminares (1)

A manipulação de LMIs utiliza algumas ferramentas básicas envolvendo matrizes, que podem ser encontradas em diversos livros e artigos.

Congruência

Transformações de congruência são definidas em termos de matrizes quadradas não singulares. Duas matrizes simétricas $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são congruentes se existir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular tal que $Q = T'RT$.

- Se Q e R são congruentes, então $Q > 0$ se e somente se $R > 0$. De fato, $R > 0$ implica $x'Rx > 0$, $\forall x \neq 0$. Definindo $y = T^{-1}x$, tem-se $x'Rx = y'T'RTy = y'Qy > 0$, $\forall y \neq 0 \Rightarrow Q > 0$.

- Note que para $R = R' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $T'RT \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Neste caso, $R > 0$ implica $T'RT \geq 0$, e $R > 0$, $\text{rank}(T) = m$ implica $T'RT > 0$, pois $\text{rank}(T'RT) = \text{rank}(T)$ e, se $\text{rank}(T) = m$, não existe $x \neq 0$ tal que $Tx = 0$.

Preliminares (2)

- Note ainda que para $R = R' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $T'RT > 0$ não implica em $R > 0$. Por exemplo,

$$T'RT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 > 0, \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \not> 0$$

- Transformações de congruência podem ser usadas juntamente com mudanças de variáveis para converter desigualdades matriciais não convexas em LMIs. Uma classe particular de transformações de congruência, formada por blocos de zeros e de matrizes identidades, permite realizar operações de troca de bloco de linhas por bloco de colunas. Por exemplo, considerando todos os blocos quadrados de mesma dimensão, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & D & E \\ C' & E' & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & E' & C' \\ E & D & B' \\ C & B & A \end{bmatrix}$$

que realiza a troca dos blocos das linhas e colunas 1 pelos blocos das linhas e colunas 3.

Preliminares (3)

Complemento de Schur

Considere a matriz quadrada simétrica X particionada da forma

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

O complemento de Schur pode ser usado na caracterização da positividade de X, com as seguintes propriedades:

- $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B'A^{-1}B > 0$;
- $X > 0$ se e somente se $C > 0$ e $A - BC^{-1}B' > 0$;
- Se $A > 0$, $X \geq 0$ se e somente se $C - B'A^{-1}B \geq 0$;
- Se $C > 0$, $X \geq 0$ se e somente se $A - BC^{-1}B' \geq 0$.

Preliminares (4)

- De fato, utilizando a fatoração abaixo e as propriedades da transformação de congruência, se A^{-1} existe, tem-se

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ B'A^{-1} & \mathrm{I} \end{bmatrix}}_{T'} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B'A^{-1}B \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}}_{T}$$

Como T é uma matriz não singular

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B'A^{-1}B \end{bmatrix} > 0$$

- Analogamente, se C^{-1} existe,

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & BC^{-1} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B' & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ C^{-1}B' & \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B' & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} > 0$$

A matriz $C - B'A^{-1}B$ é chamada de complemento de Schur de X em relação a A (se $\det(A) \neq 0$), e, se $\det(C) \neq 0$, $A - BC^{-1}B'$ é o complemento de Schur de X em relação a C. Manipulações envolvendo o complemento de Schur permitem transformar desigualdades matriciais que descrevem regiões convexas em LMIs.

Preliminares (5)

- O lema de Finsler apresentado a seguir e sua demonstração podem ser encontrados em de Oliveira & Skelton (2001).

Lema de Finsler

Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com rank $(\mathscr{B}) < n$ e $\mathscr{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathscr{B}$ (isto é, $\mathscr{B}\mathscr{B}^\perp = 0$). Então, as seguintes condições são equivalentes.

i) $w'\mathscr{Q}w < 0, \ \forall \ w \neq 0 \ : \ \mathscr{B}w = 0$

ii) $\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^\perp < 0$

iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathscr{Q} - \mu\mathscr{B}'\mathscr{B} < 0$

iv) $\exists \mathscr{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathscr{Q} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}' < 0$

- O Lema de Finsler pode ser utilizado para expressar condições de estabilidade (como as condições de Lyapunov) em termos de desigualdades matriciais equivalentes, introduzindo ou eliminando variáveis.

Estabilidade (1)

Estabilidade Assintótica

O sistema linear contínuo no tempo descrito por $\dot{x} = Ax$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é assintoticamente estável se qualquer uma das condições abaixo for verificada:

- $\lim_{t \to \infty} x \to 0$, para condição inicial $x(0)$ arbitrária
- $\max_i \operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$, $i = 1, \ldots, n$

Função de Lyapunov

A estabilidade de $\dot{x} = Ax$ (ou simplesmente a estabilidade de A) pode ser também investigada por meio de uma função de Lyapunov $v(x)$. Para que o sistema seja assintoticamente estável, duas condições devem ser verificadas:

- $v(x) > 0$, $\forall x \neq 0$;
- $\dot{v}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ solução de $\dot{x} = Ax$

Estabilidade (2)

- O Teorema de Lyapunov pode ser estabelecido a partir da escolha da função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$, pois $v(x) > 0,\ \forall x \neq 0$ implica $P > 0$ e $\dot{v}(x) < 0,\ \forall x \neq 0$ tal que $\dot{x} = Ax$

$$0 > \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'A'Px + x'PAx = x'(A'P + PA)x \quad \Longleftrightarrow \quad A'P + PA < 0$$

Note que, por congruência,

$$A'P + PA < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}\big(A'P + PA\big)P^{-1} = P^{-1}A' + AP^{-1} < 0$$

e, portanto, A é assintoticamente estável se e somente se existir $W = W'$ tal que

$$W > 0, \qquad AW + WA' < 0$$

Condição idêntica pode ser obtida analisando-se a estabilidade de A', que possui os mesmos autovalores que A.

Estabilidade (3)

Utilizando-se o Lema de Finsler, com as escolhas

$$w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathscr{B} = \begin{bmatrix} A & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathscr{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ A \end{bmatrix} \quad , \quad \mathscr{Q} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$$

as equivalências *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iv)* ficam assim: Existe $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0 \ \forall \ x, \dot{x} \neq 0 \ : \ \begin{bmatrix} A & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0$$

se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ A \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ A \end{bmatrix} = A'P + PA < 0$$

ou, ainda, se e somente se existirem $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ e $P = P' > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \mathscr{X} \begin{bmatrix} A & -\mathrm{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A' \\ -\mathrm{I} \end{bmatrix} \mathscr{X}' < 0$$

Estabilidade (4)

Particionando a matriz $\mathscr{X}$ como

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

com $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pode-se formular o seguinte teorema a partir dessa última condição.

Teorema (Finsler)

A matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é assintoticamente estável se e somente se existirem matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} X_1A + A'X_1' & P - X_1 + A'X_2' \\ P + X_2A - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0$$

Estabilidade (5)

Comentários

- A condição do Teorema anterior pode ser usada para verificar a estabilidade assintótica de um sistema linear, mas requer a determinação de um número maior de variáveis e o dobro de linhas de LMIs;
- Note que a matriz P aparece isolada em um bloco da LMI e que são as matrizes X_1 e X_2 (também chamadas multiplicadores ou variáveis de folga) que aparecem em termos envolvendo o produto com a matriz dinâmica A;
- Essa propriedade é fundamental na extensão da condição para tratar sistemas incertos.

Norma $\mathscr{H}_2$ (1)

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bw \tag{5}$$
$$y = Cx \tag{6}$$

com $w \in \mathbb{R}^m$ representanto uma entrada exógena e $y \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. Note que, para que a norma $\mathscr{H}_2$ seja finita, não existe o termo de transmissão direta de w para a saída y.

A matriz de transferência de w para y é dada por

$$H(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B$$

e a norma $\mathscr{H}_2$ é definida como

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(H(j\omega)^* H(j\omega)\big)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i\big(H(j\omega)\big)\,d\omega$$

sendo $\sigma_i(H(j\omega))$ os valores singulares e $H(j\omega)^*$ o conjugado transposto de $H(j\omega)$.

Norma $\mathscr{H}_2$ (2)

- Equivalentemente, pelo teorema de Parseval,

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(H(j\omega)^* H(j\omega)\big)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(h(t)^* h(t)\big)\,dt$$

A norma $\mathscr{H}_2$ de um sistema precisamente conhecido pode ser computada pela função `h2norm` (para sistemas definidos com `ltisys`) ou `norm(sist,2)` (para sistemas definidos com `ss` ou `tf`) no Matlab.

Em sistemas monovariáveis, a norma $\mathscr{H}_2$ ao quadrado corresponde à integral do quadrado da resposta impulsiva, isto é, para $h(t)$ real e causal (isto é, $h(t) = 0$ para $t < 0$)

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} h(t)^2\,dt$$

Norma $\mathscr{H}_2$ (3)

- A norma $\mathscr{H}_2$ também pode ser computada no espaço das variáveis de estados.

A resposta ao impulso do sistema (5)-(6) é dada por

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \begin{cases} C\exp(At)B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Como o sistema é estável, a norma $\mathscr{H}_2$ de $H(s)$ é dada por

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(h(t)'h(t)\big)\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(h(t)h(t)'\big)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(B'\exp(A't)C'C\exp(At)B\big)\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}\big(C\exp(At)BB'\exp(A't)C'\big)\,dt$$

Os gramianos de controlabilidade de (A,B) e de observabilidade de (A,C) são respectivamente dados por

$$L_c = \int_0^{+\infty} \exp(At)BB'\exp(A't)dt \quad , \quad L_o = \int_0^{+\infty} \exp(A't)C'C\exp(At)dt$$

$$AL_c + L_cA' + BB' = 0 \quad , \quad A'L_o + L_oA + C'C = 0$$

e, portanto, tem-se

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathrm{Tr}(B'L_oB) = \mathrm{Tr}(CL_cC')$$

Norma $\mathscr{H}_2$ (4)

- A norma $\mathscr{H}_2$ pode ser computada pelo procedimento convexo de otimização

$$\min_{P=P'>0} \quad \mathrm{Tr}(B'PB) \;=\; \mathrm{Tr}(BB'P)$$

sujeito a

$$A'P + PA + C'C < 0$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min_{W=W'>0} \quad \mathrm{Tr}(CWC') \;=\; \mathrm{Tr}(C'CW)$$

sujeito a

$$AW + WA' + BB' < 0$$

Na solução ótima, tem-se

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathrm{Tr}(B'PB) = \mathrm{Tr}(CWC')$$

Norma $\mathscr{H}_2$ (5)

Note que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, para A e B matrizes de dimensões apropriadas.

Observe também que as LMIs do problema de otimização podem ser obtidas diretamente da escolha da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ e da restrição $\dot{v} + y'y < 0$ para o sistema (A, B, C) de (5)-(6) (gramiano de controlabilidade) ou para o seu dual (A', C', B') (gramiano de observabilidade).

Exemplo

Norma $\mathscr{H}_\infty$ (1)

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bw \tag{7}$$
$$y = Cx + Dw \tag{8}$$

com $w \in \mathbb{R}^m$ representando uma entrada exógena e $y \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. A matriz de transferência de w para y é dada por

$$H(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B + D$$

e a norma $\mathscr{H}_\infty$ é definida como

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max}\big(H(j\omega)\big)$$

Em sistemas SISO, a norma $\mathscr{H}_\infty$ corresponde ao máximo do diagrama de magnitude de Bode. Para sistemas MIMO, a norma $\mathscr{H}_\infty$ é o máximo valor atingido pelo diagrama de valores singulares (função `sigma` no Matlab).

A Figura a seguir mostra um diagrama de valores singulares para um sistema com $H(s)$ estável, 3 entradas e 4 saídas (isto é, 3 valores singulares). A norma $\mathscr{H}_\infty$ de um sistema conhecido pode ser computada pela função `hinfnorm(ltisys)` ou `norm(ss,inf)` no Matlab.

Norma $\mathscr{H}_\infty$ (2)

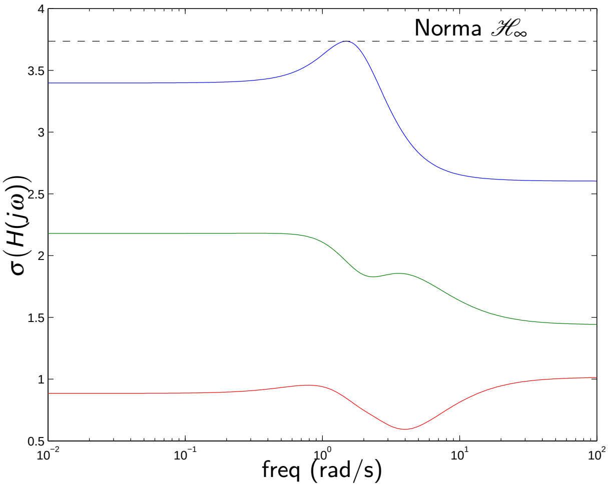


Figura: Diagrama de valores singulares e norma $\mathscr{H}_\infty$.

Norma $\mathscr{H}_\infty$ (3)

- A norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser também calculada a partir da definição de ganho $\mathscr{L}_2$. Considerando que w é um sinal de energia, ou seja,

$$\int_0^\infty w(\tau)'w(\tau)d\tau < +\infty \quad \iff \quad w \in \mathscr{L}_2$$

a norma $\mathscr{H}_\infty$ é caracterizada pelo menor valor de γ tal que

$$\|y\|_2 \leq \gamma\|w\|_2 \quad , \quad w \in \mathscr{L}_2$$

De maneira similar, estabelece-se a seguinte equivalência

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma \quad \iff \quad y'y < \gamma^2 w'w \quad , \quad w \in \mathscr{L}_2$$

Assim, para um sistema estável, a norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser caracterizada pela função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, $P = P' > 0$, impondo-se

$$\dot{v} + y'y - \gamma^2 w'w < 0$$

Levando em conta as equações do sistema, tem-se

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0$$

Norma $\mathscr{H}_\infty$ (4)

O resultado da página anterior é conhecido na literatura como "*Bounded real lemma*", que pode ser assim enunciado:

Bounded real lemma

A é assintoticamente estável e $\|H\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ B'P+D'C & D'D-\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

- Resultados equivalentes podem ser obtidos, por exemplo usando complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ B'P+D'C & D'D-\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'P+PA & PB \\ B'P & -\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} A'P+PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma^2\mathrm{I} & D' \\ C & D & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Norma $\mathscr{H}_\infty$ (5)

- Ou, ainda, se e somente se existir $\tilde{P} = (\gamma^{-2}P) = (\gamma^{-2}P)' > 0$ tal que

$$\mathrm{diag}(\gamma^{-1}\mathrm{I}, \gamma^{-1}\mathrm{I}, \gamma\mathrm{I}) \begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma^2\mathrm{I} & D' \\ C & D & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \mathrm{diag}(\gamma^{-1}\mathrm{I}, \gamma^{-1}\mathrm{I}, \gamma\mathrm{I}) =$$

$$\begin{bmatrix} A'(\gamma^{-2}P) + (\gamma^{-2}P)A & (\gamma^{-2}P)B & C' \\ B'(\gamma^{-2}P) & -\mathrm{I} & D' \\ C & D & -\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Ou ainda por qualquer outra LMI obtida por transformações de congruência.

Norma $\mathscr{H}_\infty$ (6)

A norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização. Defina $\mu = \gamma^2$ e resolva

$$\min_{P=P'>0} \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ B'P+D'C & D'D-\mu\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

ou, como $\|H(s)\|_\infty = \|H(s)'\|_\infty$, a partir do problema de otimização (dual)

$$\min_{W=W'>0} \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AW+WA'+BB' & WC'+BD' \\ CW+DB & DD'-\mu\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Exemplo

Realimentação de estados (1)

- Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m$$

O problema de estabilização pode ser assim formulado:

Problema

Determine uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a lei de controle linear

$$u = Kx$$

estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Para sistemas precisamente conhecidos, ganhos de realimentação de estados que estabilizam o sistema podem ser calculados por procedimentos de alocação de autovalores, impondo que todos tenham parte real negativa.

Realimentação de estados (2)

- No contexto de LMIs, para a determinação de um ganho K que estabilize o sistema, os passos são: escrever as condições de estabilidade para o sistema em malha fechada; aplicar transformações de congruência, equivalências e mudanças de variáveis que linearizem o problema, transformando-o em LMIs. Às vezes, uma pitada de complemento de Schur é necessária.

O sistema em malha fechada $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov $P = P' > 0$ tal que

$$(A+BK)'P + P(A+BK) < 0$$

Por congruência, tem-se

$$P^{-1}\big((A+BK)'P + P(A+BK)\big)P^{-1} = P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}K'B' + BKP^{-1} < 0$$

e, com a mudança de variáveis $W = P^{-1}$, $Z = KW$ chega-se à LMI

$$AW + WA' + BZ + Z'B' < 0$$

A condição de síntese de um ganho de realimentação de estados em termos de LMIs pode ser formulada como um teorema.

Realimentação de estados (3)

Teorema de estabilização

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$W > 0 \quad , \quad AW + WA' + BZ + Z'B' < 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZW^{-1}$.

Prova

Com $W > 0$ e Z dados, a LMI acima pode ser reescrita

$$(A+BZW^{-1})W + W(A+BZW^{-1})' < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (A+BK)W + W(A+BK)' < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad W^{-1}\big((A+BK)W + W(A+BK)'\big)W^{-1} < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A+BK)'P + P(A+BK) < 0 \quad , \quad P = W^{-1} \; , \quad K = ZW^{-1}$$

Realimentação de estados (4)

Comentários

- Com o Teorema anterior, a busca conjunta do ganho K estabilizante e da matriz P de Lyapunov foi transformada em um problema convexo;
- Esse resultado, formulado como um teste de factibilidade de LMIs e publicado em Bernussou *et al.* (1989), abriu caminho para que inúmeros problemas de controle e de filtragem para sistemas dinâmicos pudessem ser convertidos em problemas convexos.

Controle $\mathscr{H}_2$ (1)

- A realimentação de estados pode, além de estabilizar, minimizar a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada. Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 w \tag{9}$$

$$y = Cx + Du \tag{10}$$

O problema de controle ótimo $\mathscr{H}_2$ pode ser assim formulado:

Problema

Determine $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$u = Kx$$

estabilize assintoticamente e minimize a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A + B_2 K)x + B_1 w$$
$$y = (C + DK)x$$

A função de transferência em malha fechada é dada por

$$H(s) = (C + DK)\big(s\mathrm{I} - (A + B_2 K)\big)^{-1} B_1$$

Controle $\mathscr{H}_2$ (2)

- Nos anos 1960, esse problema ficou conhecido como o do regulador linear quadrático. Definindo o critério

$$J = \min_{u} \int_0^{+\infty} y'y \; dt = \int_0^{+\infty} \left(x'C'Cx + x'C'Du + u'D'Du\right) dt$$

tem-se que o ganho ótimo é dado por

$$K = -(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$$

sendo $P = P' > 0$ a solução da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - (PB_2 + C'D)(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C) + C'C = 0$$

O valor ótimo do critério é dado por $J^* = x(0)'Px(0)$, que se iguala ao mínimo valor da norma $\mathscr{H}_2$ ao quadrado sempre que $x(0)x(0)' = B_1B_1'$.

Controle $\mathscr{H}_2$ (3)

- De fato, em malha fechada tem-se

$$A_f = A - B_2(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C) \quad , \quad C_f = C - D(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$$

e a equação de Riccati pode ser reescrita como

$$A_f'P + PA_f + C_f'C_f = 0$$

Comparando com o gramiano de observabilidade, tem-se que a norma $\mathscr{H}_2$ é dada por

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathrm{Tr}(B_1'PB_1)$$

No Matlab, a solução da equação de Riccati P e o ganho ótimo K podem ser obtidos com o comando `lqr`.

Controle $\mathscr{H}_2$ (4)

- Uma solução na forma de LMIs pode ser obtida escrevendo-se as condições de cômputo de norma $\mathscr{H}_2$ para o sistema em malha fechada, aplicando transformações de congruência e mudanças convenientes de variáveis.

Considere o problema

$$\min_{K,\,P=P'>0} \quad \mathrm{Tr}(B_1'PB_1)$$

$$(A+B_2K)'P+P(A+B_2K)+(C+DK)'(C+DK)<0$$

Usando congruência e complemento de Schur, a restrição pode ser reescrita

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A+B_2K)'P+P(A+B_2K) & (C+DK)' \\ (C+DK) & -\mathrm{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}<0$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} AW+WA'+B_2Z+Z'B_2' & WC'+Z'D' \\ CW+DZ & -\mathrm{I} \end{bmatrix}<0 \ , \quad W=P^{-1} \ , \ Z=KP^{-1}$$

Controle $\mathscr{H}_2$ (5)

- O critério pode ser formulado como $\min \mathrm{Tr}(X)$ sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & B_1'P \\ PB_1 & P \end{bmatrix} > 0$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & B_1'P \\ PB_1 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} > 0 \ , \quad W = P^{-1}$$

Controle $\mathscr{H}_2$ (6)

- O resultado, na forma de teorema, fica assim.

Teorema Controle $\mathscr{H}_2$

O sistema (9)-(10) é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização

$$\min_{X=X',Z,W=W'>0} \quad \mathrm{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} AW + B_2Z + WA' + Z'B_2' & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima $K = ZW^{-1}$ é tal que a função em transferência em malha fechada satisfaz $\|H(s)\|_2^2 = \mathrm{Tr}(X)$.

- Note que a condição de estabilizabilidade aparece como um dos blocos na diagonal das LMIs.

Controle $\mathscr{H}_2$ (7)

De maneira equivalente, partindo-se do problema dual

$$\min_{K,\, W=W'>0} \quad \mathrm{Tr}\big((C+DK)W(C+DK)'\big)$$

$$(A+B_2K)W+W(A+B_2K)'+B_1B_1'<0$$

tem-se o seguinte resultado.

Teorema Controle $\mathscr{H}_2$ (dual)

O sistema (9)-(10) é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização

$$\min_{X=X',\, Z,\, W=W'>0} \quad \mathrm{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & CW+DZ \\ WC'+Z'D' & W \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} AW+B_2Z+WA'+Z'B_2' & B_1 \\ B_1' & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima $K=ZW^{-1}$ é tal que a função em transferência em malha fechada satisfaz $\|H(s)\|_2^2=\mathrm{Tr}(X)$.

Controle $\mathscr{H}_2$ (8)

Comentários

- Para sistemas precisamente conhecidos, as estratégias primal e dual fornecem os mesmos resultados para cômputo de ganho estabilizante e norma $\mathscr{H}_2$;
- Diferenças podem ocorrer nas extensões para custo garantido (isto é, quando o sistema for incerto).

Exemplo

Controle $\mathscr{H}_\infty$ (1)

- O controle ótimo $\mathscr{H}_\infty$ busca a realimentação de estados que minimiza a norma $\mathscr{H}_\infty$ do sistema em malha fechada. Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 w \tag{11}$$

$$y = Cx + Du \tag{12}$$

O problema pode ser formulado assim.

Problema

Determine $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$u = Kx$$

estabilize assintoticamente e minimize a norma $\mathscr{H}_\infty$ do sistema em malha fechada. Em malha fechada, o sistema é dado por

$$\dot{x} = (A + B_2 K)x + B_1 w$$
$$y = (C + DK)x$$

e a função de transferência por

$$H(s) = (C + DK)\big(s\mathrm{I} - (A + B_2 K)\big)^{-1} B_1$$

Controle $\mathscr{H}_\infty$ (2)

- O problema de controle ótimo $\mathscr{H}_\infty$ pode ser resolvido por meio da solução iterativa de equações de Riccati (comando `care` no Matlab).

Em malha fechada, definindo $A_f = A + B_2K$ e $C_f = C + DK$, tem-se que $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A_f'P + PA_f + C_f'C_f & PB_1 \\ B_1'P & -\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

ou, por complemento de Schur,

$$A_f'P + PA_f + C_f'C_f + \gamma^2 PB_1B_1'P < 0$$

A solução $P = P' > 0$ pode ser obtida da equação modificada de Riccati

$$A'P + PA + C'C + \gamma^{-2}PB_1B_1'P - (PB_2 + C'D)(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C) = 0$$

e $K = -(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$ garante $\|H(s)\|_\infty < \gamma$.

Para obter o ganho ótimo, é preciso reduzir iterativamente γ até o mínimo valor que admita uma solução da equação de Riccati definida positiva $P = P' > 0$.

Controle $\mathscr{H}_\infty$ (3)

A solução por meio de LMIs é dada no teorema a seguir.

Controle $\mathscr{H}_\infty$

O sistema (11)-(12) é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização

$$\min_{Z,\, W = W' > 0} \quad \mu$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + B_2Z + Z'B_2' & WC' + Z'D' & B_1 \\ CW + DZ & -\mathrm{I} & 0 \\ B_1' & 0 & -\mu\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima $K = ZW^{-1}$ é tal que a função em transferência em malha fechada satisfaz $\|H(s)\|_\infty^2 = \mu$.

Note que, assim como no caso $\mathscr{H}_2$, o bloco (1,1) da LMI reproduz a condição de estabilizabilidade. Note ainda que, na solução ótima, a matriz W pode tender à singularidade, implicando na necessidade de ganhos elevados.

Exemplo

Estabilidade de sistemas incertos (1)

- Modelos de sistemas lineares podem também considerar a presença de incertezas paramétricas de diversas maneiras. Uma representação bastante utilizada é a politópica, ou seja, o sistema linear é dado por

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B_2(\alpha)u + B_1(\alpha)w \tag{13}$$

$$y = C(\alpha)x + D(\alpha)u \tag{14}$$

e as matrizes incertas $\big(A(\alpha), B_2(\alpha), B_1(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)\big)$ pertencem a um domínio politópico descrito como a combinação convexa de vértices conhecidos. Em outras palavras,

$$\big(A(\alpha), B_2(\alpha), B_1(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)\big) \in \mathscr{D}$$

$$\mathscr{D} = \Big\{ \big(A(\alpha), B_2(\alpha), B_1(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)\big) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \big(A_i, B_{2i}, B_{1i}, C_i, D_i\big) \ ; \ \alpha \in \Delta \Big\}$$

O parâmetro α, neste tutorial considerado como invariante no tempo, representa as incertezas paramétricas e pertence ao simplex unitário, denotado por

$$\Delta = \Big\{ \alpha \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \ ; \ \alpha_i \geq 0 \Big\}$$

Por exemplo, um circuito elétrico possui componentes como resistores, indutores, capacitores que têm um valor nominal e uma tolerância. Um sistema com p parâmetros incertos pode ser representado por um politopo com 2^p vértices.

Estabilidade de sistemas incertos (2)

- As condições apresentadas nas seções anteriores para a análise de estabilidade, cômputo de custo $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$ podem ser estendidas para tratar sistemas incertos como (13)-(14), porém resultam em LMIs dependentes de parâmetros (também chamadas LMI robustas). Para exemplificar, considere o problema de análise de estabilidade.

Seguindo o mesmo desenvolvimento do caso precisamente conhecido, partindo da função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'P(\alpha)x$ com $P(\alpha)$ a determinar, tem-se que $v(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ implica $P(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ e $\dot{v}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ tal que $\dot{x} = A(\alpha)x$ implica

$$
\begin{aligned}
0 > \dot{x}'P(\alpha)x + x'P(\alpha)\dot{x} = x'A(\alpha)'P(\alpha)x + x'P(\alpha)A(\alpha)x \\
= x'(A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha))x
\end{aligned}
$$

e, portanto, $A(\alpha)$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Delta$ se e somente se as LMIs robustas

$$
P(\alpha) > 0 \quad , \quad A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0
$$

foram satisfeitas para todo $\alpha \in \Delta$, o que teria que ser verificado em um número infinito de pontos.

Estabilidade de sistemas incertos (3)

Comentários

- De maneira similar, as LMIs para cômputo de custo garantido e para síntese de ganhos de realimentação de estados poderiam ser estendidas para tratar o caso incerto, resultando em LMIs dependentes de parâmetros;
- Para resolver esse tipo de LMI, é preciso fazer alguma relaxação, ou seja, definir alguma estrutura para a incógnita do problema, a matriz $P(\alpha)$, e então obter condições numericamente verificáveis, de preferência na forma de LMIs, que forneçam uma resposta sobre a estabilidade de $A(\alpha)$ ou sobre a existência de um ganho robusto de realimentação de estados;
- Nos últimos anos surgiram diversos procedimentos com convergência garantida para tratar os problemas de análise e de cômputo de custo garantido para sistemas incertos politópicos. Na maior parte dos casos, são construídas condições LMIs cada vez mais precisas e complexas para a verificação das restrições.
- A estrutura mais simples para a matriz $P(\alpha)$, $P(\alpha) = P$, propiciou inúmeros resultados em análise e síntese de controladores e filtros para sistemas incertos, no que ficou conhecido como estabilidade quadrática (teorema a seguir).

Estabilidade de sistemas incertos (4)

Teorema Estabilidade Quadrática

A matriz $A(\alpha) \in \mathscr{D}$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Delta$ se existir uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$P > 0 \quad , \quad A_i'P + PA_i < 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, N$$

Prova

Note que, para P constante e $A(\alpha) \in \mathscr{D}$,

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(A_i'P + PA_i\right) \ , \quad \alpha \in \Delta$$

que é definida negativa para todo $\alpha \in \Delta$ se e somente se as LMIs do teorema forem satisfeitas.

Estabilizabilidade de sistemas incertos (1)

Comentários

- Utilizando matriz de Lyapunov constante, obtêm-se condições para a síntese (estabilizabilidade quadrática) de um controlador robusto por realimentação de estados como extensões imediatas dos teoremas apresentados;
- Note que as condições são apenas suficientes para a estabilização robusta, mas são necessárias e suficientes para a estabilização quadrática, isto é, o sistema em malha fechada admite uma função de Lyapunov com P constante que assegura a estabilidade para todo $\big(A(\alpha), B(\alpha)\big) \in \mathscr{D}$.
- As extensões são apresentadas a seguir.

Estabilizabilidade de sistemas incertos (2)

Teorema Estabilizabilidade Quadrática

O sistema incerto (13)-(14) é quadraticamente estabilizável por um ganho de realimentação de estados se e somente se existirem $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que

$$W > 0 \quad , \quad A_i W + W A_i' + B_i Z + Z' B_i' < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N$$

No caso afirmativo, o ganho robusto é dado por $K = ZW^{-1}$.

Teorema Estabilizabilidade Quadrática com Custo $\mathscr{H}_2$

O sistema incerto (13)-(14) é quadraticamente estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização

$$\min_{X = X', Z, W = W' > 0} \quad \mathrm{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_{1i}' \\ B_{1i} & W \end{bmatrix} > 0, \ \begin{bmatrix} A_i W + B_{2i} Z + W A_i' + Z' B_{2i}' & W C_i' + Z' D_i' \\ C_i W + D_i Z & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \ i = 1, \ldots, N$$

Na solução ótima $\mathrm{Tr}(X)$ é um custo garantido $\mathscr{H}_2$ (isto é, $\|H(s)\|_2^2 \leq \mathrm{Tr}(X)$) para o sistema em malha fechada realimentado com o ganho robusto $K = ZW^{-1}$.

Estabilizabilidade de sistemas incertos (3)

Teorema Estabilizabilidade Quadrática com Custo $\mathscr{H}_2$ (dual)

O sistema incerto (13)-(14) é quadraticamente estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização

$$\min_{X=X',Z,W=W'>0} \quad \mathrm{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & C_iW + D_iZ \\ WC_i' + Z'D_i' & W \end{bmatrix} > 0, \; i = 1,\dots,N$$

$$\begin{bmatrix} A_iW + B_{2i}Z + WA_i' + Z'B_{2i}' & B_{1i} \\ B_{1i}' & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \; i = 1,\dots,N$$

Na solução ótima $\mathrm{Tr}(X)$ é um custo garantido $\mathscr{H}_2$ (isto é, $\|H(s)\|_2^2 \le \mathrm{Tr}(X)$) para o sistema em malha fechada realimentado com o ganho robusto $K = ZW^{-1}$.

Estabilizabilidade de sistemas incertos (4)

Teorema Estabilizabilidade Quadrática com Custo $\mathscr{H}_\infty$

O sistema incerto (13)-(14) é quadraticamente estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização

$$\min_{Z,\,W=W'>0} \quad \mu$$

$$\begin{bmatrix} A_iW+WA_i'+B_{2i}Z+Z'B_{2i}' & WC_i'+Z'D_i' & B_{1i} \\ C_iW+D_iZ & -\mathrm{I} & 0 \\ B_{1i}' & 0 & -\mu\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \ i=1,\ldots,N$$

Na solução ótima μ é um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ (isto é, $\|H(s)\|_\infty^2 \le \mu$) para o sistema em malha fechada realimentado com o ganho robusto $K = ZW^{-1}$.

Note que os teoremas acima podem ser usados como condições suficientes para cômputo de custos garantidos $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$ de sistemas estáveis baseados na estabilidade quadrática, zerando-se as matrizes B_{2i} e D_i e eliminando a variável Z.

Exemplo

Análise de estabilidade com função de Lyapunov afim (1)

- Primeiramente, note que as equivalências do Lema de Finsler podem ser utilizadas para estender o o resultado de análise para o caso incerto, como apresentado no teorema a seguir.

Teorema

A matriz $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Delta$ se e somente se existirem matrizes $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\Theta(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'X_1(\alpha)' & P(\alpha) - X_1(\alpha) + A(\alpha)'X_2(\alpha)' \\ P(\alpha) + X_2(\alpha)A(\alpha) - X_1(\alpha)' & -X_2(\alpha) - X_2(\alpha)' \end{bmatrix} < 0$$

Análise de estabilidade com função de Lyapunov afim (2)

- Escolhendo para a matriz de Lyapunov $P(\alpha)$ uma estrutura similar à da matriz $A(\alpha) \in \mathscr{D}$ e fixando as matrizes X_1 e X_2 como constantes, tem-se o seguinte resultado (condições suficientes para a estabilidade robusta).

Teorema

A matriz $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Delta$ se existirem matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,\ldots,N$ tais que

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} X_1A_i + A_i'X_1' & P_i - X_1 + A_i'X_2' \\ P_i + X_2A_i - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \ , \qquad i = 1,\ldots,N$$

Prova

Imediata, notando-se que

$$\Theta(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Theta_i \ , \quad P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \ , \quad X_1(\alpha) = X_1 \ , \quad X_2(\alpha) = X_2 \ , \qquad \alpha \in \Delta$$

Análise de estabilidade com função de Lyapunov afim (3)

Comemtários

- O resultado acima surgiu no contexto do estudo de positividade real em sistemas dinâmicos;
- Explora-se o fato da matriz de Lyapunov não aparecer multiplicando a matriz dinâmica e impõem-se multiplicadores constantes X_1 e X_2;
- Um resultado interessante, que explora a estrutura afim para a matriz de Lyapunov e o fato de α pertencer ao simplex unitário diretamente na condição de estabilidade robusta vinda do Teorema de Lyapunov é dado a seguir.

Análise de estabilidade com função de Lyapunov afim (4)

Teorema

A matriz $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Delta$ se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \ldots, N$ tais que

$$A_i' P_i + P_i A_i < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N$$
$$A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N-1 \ , \ j = i+1, \ldots, N$$

Prova

Como todos os α_i são maiores ou iguais a zero, as LMIs acima garantem

$$0 > \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \left(A_i' P_i + P_i A_i \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i \alpha_j \left(A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j \right)$$
$$= A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha)$$

$$A(\alpha) \in \mathscr{D} \quad , \quad P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \ , \quad \alpha \in \Delta$$

Exemplo

Estabilizabilidade com função afim (1)

- Escolhendo multiplicadores $X_1 = X$ e $X_2 = \xi X$, com ξ uma variável escalar a determinar, da condição de estabilidade *iv)* do Lema de Finsler pode-se obter uma condição suficiente para a estabilização robusta de sistemas incertos.

Teorema

O sistema incerto (13)-(14) é estabilizável por um ganho robusto de realimentação de estados se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,\ldots,N$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um escalar $\xi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} A_iX + X'A_i' + B_iZ + Z'B_i' & W_i - X' + \xi A_iX + \xi B_iZ \\ W_i - X + \xi X'A_i' + \xi Z'B_i' & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1,\ldots,N$$

No caso afirmativo, $K = ZX^{-1}$ é o ganho e a estabilidade robusta do sistema em malha fechada é assegurada pela função de Lyapunov $v(x) = x'W(\alpha)x$ com

$$W(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i \ , \quad \alpha \in \Delta$$

Estabilizabilidade com função afim (2)

Comentários

- Condição apenas suficiente para a estabilizabilidade robusta e, além disso, requer uma busca unidimensional no parâmetro ξ;
- Simulações numéricas mostram resultados melhores do que os obtidos com a estabilizabilidade quadrática;
- É possível mostrar que, se o sistema é quadraticamente estabilizável, então existe um ξ tal que as condições são satisfeitas.

Exemplo

Conclusão

Tópicos apresentados

- Ferramentas fundamentais e resultados de análise de estabilidade e de síntese de controladores de realimentação de estados mais simples que podem ser obtidos com LMIs;
- Extensões para tratar incertezas e algumas relaxações para a resolução de LMIs dependentes de parâmetros;
- Sistemas contínuos.

Comentários Finais

- Assunto vasto: análise, controle, filtragem, programação semi-definida & otimização, etc.
- Mais informações: Internet e nos cursos de pós-graduação que abordam tópicos relacionados com LMIs.

Agradecimentos

- Os autores agradecem aos organizadores do XVIII CBA o convite para a apresentação deste mini-curso.