Análise e Controle de Sistemas Lineares Incertos Por Meio de Desigualdades Matriciais Lineares: Exercícios

Ricardo C.L.F. Oliveira & Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

12 de Semestre 2010

Tópicos

1. Exercício 1
2. Exercício 2
3. Exercício 3
4. Exercício 4
5. Exercício 5
6. Exercício 6
7. Exercício 7
8. Exercício 8

Exercício 1

- Considere o seguinte problema de otimização convexo baseado em desigualdades matriciais lineares:

$$\min_{P} \mathrm{Tr}(P) \tag{1}$$

$$P > 0, \qquad A'P + PA + Q < 0 \tag{2}$$

- Resolva com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Resolva agora com o seguinte problema de otimização alternativo:

$$\min_{P,\rho} \rho \tag{3}$$

$$P > 0, \qquad A'P + PA + Q < 0, \qquad \rho \geq \mathrm{Tr}(P) \tag{4}$$

Exercício 2 – Norma $\mathscr{H}_2$

Para ilustrar o cômputo da norma $\mathscr{H}_2$ usando LMIs, considere o sistema massa-mola apresentado em (Iwasaki, 1996), ilustrado na Figura 1.

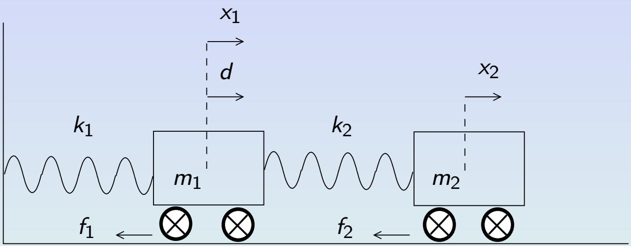

Figura: Sistema massa-mola.

A mesma função de transferência de(Iwasaki, 1996) é considerada, isto é, da força de entrada d aplicada à massa m_1 para o sinal de erro $e = x_2$ (posição da massa m_2).

Exercício 2 – Norma $\mathscr{H}_2$

- As matrizes A, B e C são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{c_0}{m_1} & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{c_0}{m_2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores dos parâmetros são: massas $m_1 = 1$ e $m_2 = 0.5$; elasticidade das molas $k_1 = k_2 = 1$ e as forças de atrito f_1 e f_2 dadas por $f_i = -c_0 \dot{x}_i$ $(i = 1, 2)$, sendo que $c_0 = 2$ é o coeficiente de atrito viscoso.

- Determine a norma $\mathscr{H}_2$ deste sistema usando seguinte problema de otimização:

$$\min_{\rho,\ W = W' > 0} \rho$$

sujeito a

$$\rho \geq \mathrm{Tr}(CWC'), \qquad AW + WA' + BB' < 0$$

Na solução ótima $\rho = \rho^\star$, tem-se

$$\|H(s)\|_2^2 = \rho^\star$$

Exercício 3 – Norma $\mathscr{H}_\infty$

- Determine a norma $\mathscr{H}_\infty$ do sistema massa-mola usando o seguinte problema de otimização:

$$\min_{P=P'>0} \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ B'P+D'C & D'D-\mu \end{bmatrix} < 0$$

No ótimo $\mu = \mu^\star$, a norma $\mathscr{H}_\infty$ é dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \sqrt{\mu^\star}$$

Exercício 4 – Controle $\mathscr{H}_2$

Considere um modelo de satélite (Gahinet et al., 1995) que consiste em dois corpos rígidos (corpo principal e de instrumentação) conectados por um ligação flexível modelada como uma mola com constante de torque k e amortecimento viscoso f. A Figura 2 apresenta uma ilustração do satélite, sendo θ_1 e θ_2 os ângulos de guinada para o corpo principal e para o módulo de instrumentação, respectivamente.

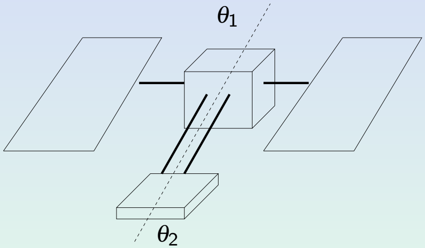

Figura: Modelo de dois corpos rígidos para satélite.

Exercício 4 – Controle $\mathscr{H}_2$

A representação no espaço de estados é dada por

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -k & k & -f & f\\ k & -k & f & -f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} w + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} T,$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} T,$$

sendo T o torque de controle e w uma perturbação sobre o corpo principal.

$$\min_{\rho,\ X=X',Z,W=W'>0} \quad \rho$$

$$\begin{bmatrix}X & CW+DZ\\ WC'+Z'D' & W\end{bmatrix} > 0,\ \rho \geq \mathrm{Tr}(X),\ \begin{bmatrix}AW+B_2Z+WA'+Z'B_2' & B_1\\ B_1' & -\mathrm{I}\end{bmatrix} < 0$$

Com $K = ZW^{-1}$ e $\|H(s)\|_2^2 = \rho^\star$.

Exercício 5 – Controle $\mathscr{H}_\infty$

- Determine um controlador por realimentação de estados $\mathscr{H}_\infty$ para o modelo do satélite usando o problema de otimização:

$$\min_{Z,\, W = W' > 0} \quad \mu$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + B_2 Z + Z' B_2' & WC' + Z' D' & B_1 \\ CW + DZ & -\mathrm{I} & 0 \\ B_1' & 0 & -\mu \mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima $K = ZW^{-1}$ e $\|H(s)\|_\infty = \sqrt{\mu^\star}$.

Exercício 6 – Controle $\mathscr{H}_2$ robusto

- Considere novamente o modelo do satélite. A constante da mola e o amortecimento viscoso não mais são assumidos como precisamente conhecidos, mas pertencentes às faixas

$$0.09 \leq k \leq 0.4 \quad , \quad 0.0038 \leq f \leq 0.04$$

- Armazene os vértices do sistema em uma estrutura celular.
- Calcule um controlador estabilizante com um custo garantido $\mathscr{H}_2$ usando o seguinte problema de otimização.

$$\min_{\rho,\ X = X', Z, W = W' > 0} \quad \rho$$

$$\begin{bmatrix} X & B_{1i}' \\ B_{1i} & W \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} A_i W + B_{2i} Z + W A_i' + Z' B_{2i}' & W C_i' + Z' D_i' \\ C_i W + D_i Z & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N$$

$$\rho \geq \mathrm{Tr}(X)$$

Na solução ótima $\rho = \rho^\star$ é um custo garantido $\mathscr{H}_2$ (isto é, $\|H(s)\|_2^2 \leq \rho$) para o sistema em malha fechada realimentado com o ganho robusto $K = ZW^{-1}$.

Exercício 7 – Estabilidade Robusta

Considere o sistema dinâmico incerto descrito por

$$\dot{x} = A(\alpha)x \quad , \quad \alpha \in \Delta$$

cujos vértices A_i são dados por

$$A_i = M_0 + \rho_i M_i, \qquad i \in \{1,2,3\}$$

com

$$M_0 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.6 & -1.7 & 3.1 \\ 0.7 & -2.1 & -2.6 & -3.6 \\ 0.5 & 2.4 & -5.0 & -1.6 \\ -0.6 & 2.9 & -2.0 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 & -0.3 & -0.1 \\ -0.8 & 0.2 & -1.1 & 2.8 \\ -1.9 & 0.8 & -1.1 & 2.0 \\ -2.4 & -3.1 & -3.7 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 3.4 & 1.7 & 1.5 \\ -3.4 & -1.4 & 1.3 & 1.4 \\ 1.1 & 2.0 & -1.5 & -3.4 \\ -0.4 & 0.5 & 2.3 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.4 & -0.7 & -0.7 \\ 2.1 & 0.6 & -0.1 & -2.1 \\ 0.4 & -1.4 & 1.3 & 0.7 \\ 1.5 & 0.9 & 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Determine o maior valor de ρ tal que o politopo seja robustamente estável.

Exercício 7 – Estabilidade Robusta

- Problema de factibilidade 1: Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n\times}$, $i = 1, \ldots, N$ e matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} X_1 A_i + A_i' X_1' & P_i - X_1 + A_i' X_2' \\ P_i + X_2 A_i - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Problema de factibilidade 2: Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n\times}$, $i = 1, \ldots, N$ tais que

$$A_i' P_i + P_i A_i < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N$$
$$A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N-1 \ , \ j = i+1, \ldots, N$$

Exercício 8 – Estabilização Robusta

- Considere o sistema politópico

$$\dot{x} = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x + (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)u \quad , \quad \alpha \in \Delta$$

com as matrizes dos vértices dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5.3 & 5.0 \\ -5.3 & -12.7 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -13.0 & 20.9 \\ -0.6 & -14.2 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é instável e não pode ser estabilizado pelas condições da estabilização quadrática (matriz de Lyapunov fixa). Determine uma controlador estabilizante robusto por meio de uma função de Lyapunov afim nos parâmetros usando o seguinte problema de factibilidade: Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_i \in \mathbb{R}^{n\times}$, $i = 1, \ldots, N$ e matrizes $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um escalar ξ tais que

$$\begin{bmatrix} A_i X + X' A_i' + B_i Z + Z' B_i' & W_i - X' + \xi A_i X + \xi B_i Z \\ W_i - X + \xi X' A_i' + \xi Z' B_i' & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0 \; , \quad i = 1, \ldots, N$$

então $K = ZX^{-1}$ estabiliza robustamente o sistema.