IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 5: Relaxações LMIs

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2022

Tópicos

1. Análise de Estabilidade Robusta
2. Estabilidade Quadrática
3. Funções com Dependência Afim em α

Sistema Linear Politópico

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x, \qquad A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Lambda_N, \tag{1}$$

sendo Λ_N o simplex unitário dado por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \right\}.$$

- Utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov, é possível formular um teste de estabilidade robusta para o sistema (1) por meio da existência de uma matriz de Lyapunov $P(\alpha) = P(\alpha)'$ tal que

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0, \quad P(\alpha) > 0,\ \forall \alpha \in \Lambda_N$$

Este teste não é numericamente tratável (dimensão infinita), a menos que uma estrutura particular para $P(\alpha)$ seja fixada.

Certificado de estabilidade

Problema

Como certificar a estabilidade robusta (Hurwitz) da matriz $A(\alpha)$ para todo $\alpha \in \Lambda_N$ por meio de um teste que:

- Seja dado em termos de um conjunto finito de LMIs.
- Utilize apenas os vértices do sistema A_i, $i = 1, \ldots, N$ como informações de entrada.

- Estratégia de solução: fixar estruturas particulares para $P(\alpha)$ (potenciais fontes de conservadorismo) e explorar propriedades dos parâmetros incertos para testar a positividade (ou negatividade) das desigualdades resultantes.

- Nesta aula investiga-se duas estruturas particulares para $P(\alpha)$:
  - $P(\alpha) = P$
  - $P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i$

Estabilidade Quadrática

Estabilidade Quadrática (EQ)

Teorema 1

O sistema (1) *é estável* $\forall \alpha \in \Lambda_N$ *se existir uma matriz* $P = P' > 0$ *tal que*

$$A_i'P + PA_i < 0, \qquad i = 1, \ldots, N$$

Prova: Multiplicando por $\alpha_i \geq 0$ e somando de 1 até N, tem-se

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\Big)' P + P\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\Big) = A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0$$

- Os parâmetros incertos podem ser variantes no tempo, com taxas de variação $(\dot{\alpha}(t))$ arbitrariamente rápidas.

Comentários

Suficiência

- A estabilidade quadrática é uma condição suficiente para a estabilidade robusta de um sistema incerto, pois assume

$$P(\alpha) = P \quad ; \quad \dot{P}(\alpha) = 0$$

- A mesma função de Lyapunov é usada para verificar a estabilidade de todo o domínio de incertezas.
- Resultado pode ser conservador na avaliação de domínios de estabilidade no caso de sistemas invariantes no tempo (ou no caso de sistemas cujos parâmetros variantes no tempo possuem limites nas taxas de variação).

- Se verificada, a condição garante a estabilidade de $\rho A(\alpha)$ para qualquer $\rho > 0$ (em outras palavras, para qualquer combinação linear positiva dos vértices A_i).

- Outras escolhas para $P(\alpha)$ (ou outras formas para $v(x)$) tais como funções de Lyapunov quadráticas por partes, poliedrais, afins, polinomiais, etc., podem reduzir o conservadorismo (nem sempre os testes são formulados em termos de LMIs).

Função de Lyapunov dependente de α

- A função de Lyapunov quadrática (no estado) $v(x) = x'Px$ fornece um certificado de estabilidade para o sistema (1) que independe dos parâmetros incertos $\alpha \in \Lambda_N$.

Extensão

Obter um teste de estabilidade para o sistema (1) usando como certificado de estabilidade a existência da função de Lyapunov $v(x) = x'P(\alpha)x$, com a matriz de Lyapunov $P(\alpha)$ apresentando a estrutura

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \qquad \alpha \in \Lambda_N \tag{2}$$

Estratégia: Usar o Lema de Fisnler

- Para α fixo, o Lema de Finsler fornece as seguintes condições equivalentes:

$$w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \; ; \; \mathscr{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \; ; \; \mathscr{B}^{\perp}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A(\alpha) \end{bmatrix} \; ; \; \mathscr{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

① $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad \forall\, x, \dot{x} \neq 0 \,:\, \begin{bmatrix} A(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0$$

② $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que $\quad A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$

Lema de Finsler

③ $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}, P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} -\mu(\alpha)A(\alpha)'A(\alpha) & \mu(\alpha)A(\alpha)' + P(\alpha) \\ \mu(\alpha)A(\alpha) + P(\alpha) & -\mu(\alpha)\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

④ $\exists \mathscr{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times n}, P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathscr{X}(\alpha)\begin{bmatrix} A(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha)' \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}\mathscr{X}(\alpha)' < 0$$

- Definindo as partições $X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathscr{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

a condição ④ pode ser reescrita como $\exists X_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} X_1(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'X_1(\alpha)' & P(\alpha) - X_1(\alpha) + A(\alpha)'X_2(\alpha)' \\ P(\alpha) + X_2(\alpha)A(\alpha) - X_1(\alpha)' & -X_2(\alpha) - X_2(\alpha)' \end{bmatrix} < 0$$

Linearização: matrizes extras independentes de α

- Importante: $P(\alpha)$ aparece isolada (não está multiplicada por nenhuma matriz função de α) nas LMIs da condição ④

- Fixando algumas matrizes como constantes (independentes de α), tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_1A(\alpha)+A(\alpha)'X_1' & \star \\ P(\alpha)+X_2A(\alpha)-X_1' & -X_2-X_2' \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \begin{bmatrix} X_1A_i+A_i'X_1' & \star \\ P_i+X_2A_i-X_1' & -X_2-X_2' \end{bmatrix}$$

e portanto, uma condição suficiente para a existência de $P(\alpha) > 0$ tal que $A(\alpha)'P(\alpha)+P(\alpha)A(\alpha) < 0$ é dada pela existência de $P_i = P_i' > 0$, $i = 1,\ldots,N$ e X_1, X_2 tais que

$$\begin{bmatrix} X_1A_i+A_i'X_1' & P_i-X_1+A_i'X_2' \\ P_i+X_2A_i-X_1' & -X_2-X_2' \end{bmatrix} < 0 \; ; \; i=1,\ldots,N$$

Condição de estabilidade

Lema 1

Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \ldots, N$ e matrizes X_1, X_2 tais que

$$\begin{bmatrix} X_1 A_i + A_i' X_1' & P_i - X_1 + A_i' X_2' \\ P_i + X_2 A_i - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \; ; \; i = 1, \ldots, N$$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dada por (2) é tal que $A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < 0$.

Prova: Multiplicando as condições por $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ e somando, tem-se

$$\begin{bmatrix} X_1 A(\alpha) + A(\alpha)' X_1' & P(\alpha) - X_1 + A(\alpha)' X_2' \\ P(\alpha) + X_2 A(\alpha) - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

aplicando a transformação de congruência obtém-se a condição desejada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A(\alpha) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_1 A(\alpha) + A(\alpha)' X_1' & P(\alpha) - X_1 + A(\alpha)' X_2' \\ P(\alpha) + X_2 A(\alpha) - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A(\alpha) \end{bmatrix} =$$

$$= A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < \mathbf{0}$$

Linearização: Lema da Projeção Recíproca

- Mesma estratégia do Lema de Finsler: Isolar a matriz $P(\alpha)$ usando uma variável adicional.

Lema 2

Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \ldots, N$ e uma matriz V tais que

$$\begin{bmatrix} -V - V' & V'A_i + P_i & V' \\ A_i'V + P_i & -P_i & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -P_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, N$$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dada por (2) *é tal que $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$.*

Prova: Multiplique as desigualdades por α_i e some para $i = 1, \ldots, N$, obtendo

$$\begin{bmatrix} -V - V' & V'A(\alpha) + P(\alpha) & V' \\ A(\alpha)'V + P(\alpha) & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -P(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} -V - V' & V'A_i + P_i & V' \\ A_i'V + P_i & -P_i & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -P_i \end{bmatrix}$$

O resto da prova segue do Lema da Projeção Recíproca.

Outra estratégia: polinômios quadráticos

- Uma segunda estratégia: uso de $P(\alpha)$ afim e de $A(\alpha)$ diretamente na expressão $A(\alpha)'P(\alpha)+P(\alpha)A(\alpha)<0$.

Lema 3

Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $i=1,\ldots,N$ tais que

$$A_i'P_i + P_iA_i < -\mathbf{I} \quad ; \quad i=1,\ldots,N$$

$$A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j < \frac{2}{N-1}\mathbf{I} \quad ; \quad i=1,\ldots,N-1 \ ; \ j=i+1,\ldots,N$$

então $P(\alpha)=P(\alpha)'>0$ dada por (2) é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que certifica a estabilidade do sistema (1) para todo $\alpha \in \Lambda_N$.

Prova

Prova:

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \left(A_i'P_i + P_iA_i \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i\alpha_j \left(A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j \right)$$

- Impondo as condições do Lema (lembrando que $\alpha_i\alpha_j \geq 0$):

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < -\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i\alpha_j \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{0}$$

- pois

$$(N-1) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i\alpha_j = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \geq 0$$

Propriedades de LMIs: homogeneidade

- Pela homogeneidade das LMIs nas variáveis P_i, $i = 1,\ldots,N$, tem-se

$$A_i'P_i + P_iA_i < -\mathbf{I}$$
$$A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j < \frac{2}{N-1}\mathbf{I}$$
$$\Updownarrow$$
$$A_i'(\varepsilon P_i) + (\varepsilon P_i)A_i < -\varepsilon\mathbf{I}$$
$$A_i'(\varepsilon P_j) + (\varepsilon P_j)A_i + A_j'(\varepsilon P_i) + (\varepsilon P_i)A_j < \varepsilon\frac{2}{N-1}\mathbf{I}$$

para qualquer escolha de $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, e adotando as mudanças de variáveis $\bar{P}_i = \varepsilon P_i,\ i = 1,\ldots,N$ tem-se as condições equivalentes (mais vantajosas do ponto de vista numérico)

$$A_i'\bar{P}_i + \bar{P}_iA_i < \mathbf{0}$$
$$A_i'\bar{P}_j + \bar{P}_jA_i + A_j'\bar{P}_i + \bar{P}_iA_j < \mathbf{0}$$

- Impondo-se que todas as parcelas de uma soma ponderada por coeficientes positivos sejam definidas negativas, tem-se uma condição suficiente para que a soma seja definida negativa.

Combinação das idéias anteriores

- Terceira estratégia: trabalhar com o produto de matrizes com dependência afim diretamente na condição ④ do lema de Finsler.

Lema 4

Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, e matrizes X_{1i}, X_{2i}, $i = 1, \ldots, N$ tais que

$$\begin{bmatrix} X_{1i}A_i + A_i'X_{1i}' & P_i - X_{1i} + A_i'X_{2i}' \\ P_i + X_{2i}A_i - X_{1i}' & -X_{2i} - X_{2i}' \end{bmatrix} < 0 \; ; \; i = 1, \ldots, N$$

$$\begin{bmatrix} A_i'X_{1j}' + X_{1j}A_i + A_j'X_{1i}' + X_{1i}A_j & P_i + P_j - X_{1i} - X_{1j} + A_i'X_{2j}' + A_j'X_{2i}' \\ P_i + P_j - X_{1i}' - X_{1j}' + X_{2j}A_i + X_{2i}A_j & -X_{2i} - X_{2i}' - X_{2j} - X_{2j}' \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, \ldots, N-1 \;\; ; \;\; j = i+1, \ldots, N$$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dada por (2) é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que certifica a estabilidade do sistema (1) para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com

$$X_1(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_{1i} \; , \; X_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_{2i} \quad ; \quad \alpha \in \Lambda_N$$

Comentários

- A condição garante que $P(\alpha)$ é uma função de Lyapunov dependente de parâmetro α que assegura a estabilidade assintótica de qualquer $A(\alpha) \in \mathscr{A}$.
- O mesmo resultado poderia ser expresso em termos das matrizes $\mathscr{Q}(\alpha)$ e $\mathscr{X}(\alpha)$ da condição ④ do lema de Finsler, definindo a seguinte estrutura para a matriz $\mathscr{Q}(\alpha)$

$$\mathscr{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \ ; \ \mathscr{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_i \\ P_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \ ; \ \mathscr{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \ ; \ \mathscr{B}_i = \begin{bmatrix} A_i & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Lema 5

Se existirem matrizes $\mathscr{Q}_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ com a estrutura acima e matrizes $\mathscr{X}_i \in \mathbb{R}^{2n\times n}$, $i = 1,\ldots,N$ tais que

$$\mathscr{Q}_i + \mathscr{X}_i\mathscr{B}_i + \mathscr{B}_i'\mathscr{X}_i' < 0 \ ; \ i = 1,\ldots,N$$

$$\mathscr{Q}_i + \mathscr{Q}_j + \mathscr{X}_i\mathscr{B}_j + \mathscr{X}_j\mathscr{B}_i + \mathscr{B}_i'\mathscr{X}_j' + \mathscr{B}_j'\mathscr{X}_i' < 0 \quad ; \quad i = 1,\ldots,N-1 \ ; \ j = i+1,\ldots,N$$

então $\mathscr{Q}(\alpha) + \mathscr{X}(\alpha)\mathscr{B}(\alpha) + \mathscr{B}(\alpha)'\mathscr{X}(\alpha)' < 0$.

Relaxação com "variáveis do lado direito"

- Considere $T_i \triangleq A_i'P_i + P_iA_i$, $T_{ij} \triangleq A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j$ e o seguinte polinômio quadrático

$$T(\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 T_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i \alpha_j T_{ij}, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

- Um teste suficiente para testar a negatividade de $T(\alpha)$ foi dado no Lema 3. Outra estratégia para testar a negatividade desse polinômio consiste em introduzir o seguinte polinômio majorante:

$$T(\alpha) \leq X(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 X_{ii} + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i \alpha_j X_{ij} = (\alpha \otimes \mathbf{I}_n)' \mathbb{X} (\alpha \otimes \mathbf{I}_n),$$

$$(\alpha \otimes \mathbf{I}_n)' \mathbb{X} (\alpha \otimes \mathbf{I}_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I}_n \\ \alpha_2 \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ \alpha_N \mathbf{I}_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I}_n \\ \alpha_2 \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ \alpha_N \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

sendo X_{ij} variáveis extras.

Relaxação com "variáveis do lado direito"

- Estratégia: Ao invés de testar a positividade de $T(\alpha)$ impondo restrições diretamente nos coeficientes matriciais T_i e T_{ij}, a técnica consiste em aplicar um teste diferente de negatividade em $X(\alpha)$ (que majora $T(\alpha)$).

Lema 6

Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, e matrizes $X_{ij} = X_{ij}'$, $i,j = 1,\dots,N$ tais que

$$T_i < X_{ii}, \qquad T_{ij} < 2X_{ij}, \qquad i = 1,\dots,N,\ j = i+1,\dots,N$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} < \mathbf{0}_{nN}$$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dada por (2) *é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que certifica a estabilidade do sistema* (1) *para todo $\alpha \in \Lambda_N$,*

- Ideia da prova: Teste de positividade de uma forma quadrática.

Comentários Finais

- Extensões para tratar $\mathscr{D}$-estabilidade (regiões convexas genéricas no plano complexo) são imediatas.

- As condições apresentam diferentes graus de complexidade (número de variáveis escalares e número de LMIs).

- Mesmo condições equivalentes podem apresentar desempenhos numéricos diferentes (dependem do resolvedor de LMIs).

- As mesmas estratégias podem ser usadas para o cômputo de custos garantidos $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$.

- Para $P(\alpha)$ dependente de α e parâmetros variantes no tempo, o tratamento do termo adicional $\dot{P}(\alpha)$ é um complicador a mais na obtenção das LMIs.

Comentários Finais

- As condições dos Lemas 1 e 3 são independentes, ou seja, ambas são suficientes para a estabilidade robusta porém uma não contém a outra nem vice-versa.

- A condição do Lema 4 contém as duas anteriores como casos particulares.

- As condições dos Lemas 1, 3 e 4, baseadas em funções de Lyapunov dependentes na forma afim do parâmetro α, contêm a condição da estabilidade quadrática (Teorema 1) como caso particular.

- A técnica apresentada no Lema 6 pode ser aplicada a qualquer polinômio quadrático.

✔ $P(\alpha) > 0$ tal que $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$ poderia ser testado com funções polinomiais em α (condições mais abrangentes do que as baseadas na função com dependência afim no parâmetro α).