Nome: .... **RA:** ....

1ª Questão: Transforme a desigualdade

$$(X^{-1}+Y^{-1})^{-1} > Z^{-1} + W'W$$

em uma LMI nas variáveis de decisão $X = X' > 0$, $Y = Y' > 0$, $Z = Z' > 0$ e W. Dica: use o lema da inversão

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\big(C^{-1}+DA^{-1}B\big)^{-1}DA^{-1}$$

e complemento de Schur.

Solução:

$$X - Z^{-1} - W'W > X(Y+X)^{-1}X$$

$$\begin{bmatrix} X - Z^{-1} - W'W & X \\ X & Y+X \end{bmatrix} > 0 \;, \quad \begin{bmatrix} X - Z^{-1} & X \\ X & Y+X \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} W' \\ 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} W & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X - Z^{-1} & X & W' \\ X & Y+X & 0 \\ W & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \;, \quad \begin{bmatrix} X & X & W' \\ X & Y+X & 0 \\ W & 0 & I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & X & I & W' \\ X & X+Y & 0 & 0 \\ I & 0 & Z & 0 \\ W & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \;, \quad \begin{bmatrix} X & X & W' & I \\ X & X+Y & 0 & 0 \\ W & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} > 0$$

2ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Escreva as condições do Lema de Finsler para a estabilidade do sistema, isto é, determine $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ para que a condição ② produza as condição de estabilidade $\dot{v}(x,\dot{x}) < 0$ do sistema acima com a função de Lyapunov

$$v(x,\dot{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A & -I & 0 \\ 0 & A & -I \end{bmatrix} \;, \quad \mathcal{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \end{bmatrix} \;, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & P_{11} & P_{12} \\ P_{11} & P_{12}+P_{12}' & P_{22} \\ P_{12}' & P_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

Lema de Finsler: Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com rank $(\mathcal{B}) < n$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0$). Então, as seguintes condições são equivalentes:

① $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall\, w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$

② $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{\perp} < 0$

③ $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$

④ $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$

1	
2	
3	
4	
5	

3ª Questão: Considere o sistema linear com atraso δ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\delta x(t-\delta) \tag{1}$$

Sabendo que o sistema é estável se existirem matrizes simétricas definidas positivas W e S tais que

$$AW + WA' + S + WA'_\delta S^{-1} A_\delta W < 0,$$

formule em termos de LMIs condições suficientes para que o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\delta x(t-\delta) + Bu(t) \tag{2}$$

seja estabilizável pela lei de controle $u(t) = Kx(t) + K_\delta x(t-\delta)$

Solução:

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + BZ + Z'B' + S & WA'_\delta + Z'_\delta B' \\ A_\delta W + BZ_\delta & -S \end{bmatrix} < 0 \ \ , \quad K = ZW^{-1} \ , \ K_\delta = Z_\delta W^{-1}$$

4ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t)$$

e a função quadrática de Lyapunov $v(x) = x'Px$, $P = P' > 0$. Determine as condições na forma de LMI para que $\dot{v} < -y'y$

Solução:

$$A'P + PA + C'C < 0 \ \ , \ P > 0$$

5ª Questão: Considere o sistema discreto dado por

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-1)$$

Formule uma condição na forma de LMI que garanta a estabilidade do sistema. Dica: defina um sistema com vetor de estados aumentado.

Solução:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} < 0$$