1ª Questão: Considere $P = P' > 0$ como variável e A, B, C e $R = R' > 0$ matrizes dadas. Obtenha na forma de LMI uma expressão equivalente a

$$A'P + PA + (PB - C)'R^{-1}(PB - C) < 0$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & B'P - C' \\ PB - C & -R \end{bmatrix} < 0$$

2ª Questão: Determine a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3w \\ y = 4x \end{cases}$$

Pela definição:

$$H(s) = \frac{12}{s+2}, \quad |H(j\omega)| = \frac{12}{\sqrt{\omega^2 + 4}}, \quad \text{máximo ocorre em } \omega = 0 \ \Rightarrow \ \|H(s)\|_\infty = 6$$

3ª Questão: Determine a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3w \\ y = 4x \end{cases}$$

$$\|H(s)\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(B'PB)} = \sqrt{\mathrm{tr}(CWC')}$$

$$A'P + PA + C'C = 0, \quad AW + WA' + BB' = 0$$

$$\Rightarrow \ -2p - 2p + 16 = 0, \ p = 4, \ \|H(s)\|_2 = \sqrt{36} = 6 \ , \ -2w - 2w + 9 = 0, \ w = 9/4, \ \|H(s)\|_2 = \sqrt{36} = 6$$

4ª Questão: Transforme a desigualdade

$$(X^{-1} + Y^{-1})^{-1} > Z^{-1} + W'W$$

em uma LMI nas variáveis de decisão $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ e W.

Pelo lema da inversa:

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

Complemento de Schur:

$$A > BC^{-1}B' \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0$$

Portanto,

$$(X^{-1} + Y^{-1})^{-1} = X - X(X+Y)^{-1}X > Z^{-1} + W'W$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} X - X(X+Y)^{-1}X - Z^{-1} & W' \\ W & I \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} X - Z^{-1} & W' \\ W & I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} (X+Y)^{-1} \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} X - Z^{-1} & W' & X \\ W & I & 0 \\ X & 0 & X + Y \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} X & W' & X \\ W & I & 0 \\ X & 0 & X+Y \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Z^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} X & W' & X & I \\ W & I & 0 & 0 \\ X & 0 & X+Y & 0 \\ I & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} > 0$$

5ª Questão: Seja a matriz politópica $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ e a matriz definida positiva $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$, $Q(\alpha) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$. Apresente um conjunto finito de LMIs para testar a condição

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + Q(\alpha) < 0$$

com $P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$.

Para as estruturas dadas, desenvolvendo, tem-se:

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + (\alpha_1 + \alpha_2)Q(\alpha) =$$
$$\alpha_1^2(A_1'P_1 + P_1A_1 + Q_1) + \alpha_1\alpha_2(A_1'P_2 + P_2A_1 + Q_1 + A_2'P_1 + P_1A_2 + Q_2) + \alpha_2^2(A_2'P_2 + P_2A_2 + Q_2)$$

Portanto, uma condição suficiente para que a condição acima seja verificada é dada pelas LMIs

$$A_1'P_1 + P_1A_1 + Q_1 < 0, \;\; A_2'P_2 + P_2A_2 + Q_2 < 0, \;\; A_1'P_2 + P_2A_1 + Q_1 + A_2'P_1 + P_1A_2 + Q_2 < 0$$