Nome: ....

RA: ....

1) (100)	
2) (100)	
3) (100)	
4) (100)	

P1) ____________

Propriedades (para usar sem provar)

$$x, y \in \mathbb{R}^n \text{ortogonais} \Leftrightarrow x'y = 0$$

$$\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA) \quad ; \quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ x & x & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \quad ; \quad \det\left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) = \det(A)$$

1ª Questão: Mostre que para qualquer matriz $A \in \Re^{n\times n}$

$$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

sendo que λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são os autovalores de A.

2ª Questão: Mostre que, para uma matriz quadrada A qualquer,

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & \mathrm{I} \end{array}\right]\right) = \det(A)$$

3ª Questão: Mostre que uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana (isto é, a matriz A é igual à sua conjugada transposta) possui autovalores reais.

4ª Questão: Seja $A \in \Re^{n\times n}$ e (λ_i, q^i), (β_i, p^i), $i = 1, 2, \ldots, n$ os pares de autovalores-autovetores à direita e à esquerda de A, isto é,

$$Aq^i = \lambda_i q^i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$p^i A = \beta_i p^i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

sendo que q^i e p^i são, respectivamente, vetores coluna e linha de dimensão n.

a) Mostre que $\lambda_i = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) Mostre que, para quaisquer dois autovalores distintos de A, o autovetor à esquerda de um autovalor é ortogonal ao autovetor à direita do outro;