IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 2: Norma $\mathscr{H}_\infty$

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2024

Tópicos

Norma $\mathscr{H}_\infty$ para sistemas contínuos

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \tag{2}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representando o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ uma entrada exógena e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida.

- A matriz de transferência de w para y é dada por

$$H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

e a norma $\mathscr{H}_\infty$ é definida como

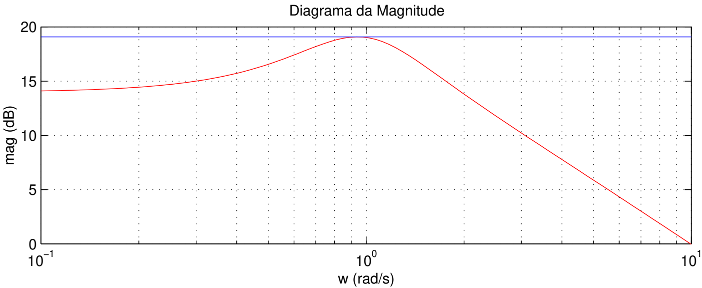
$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max}\big(H(j\omega)\big)$$

com σ_i, $i = 1, \ldots, \min(m,p)$ (valores singulares de $H(j\omega)$) dados por

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i\left(H(j\omega)^* H(j\omega)\right)} = \sqrt{\lambda_i\left(H(j\omega) H(j\omega)^*\right)}$$

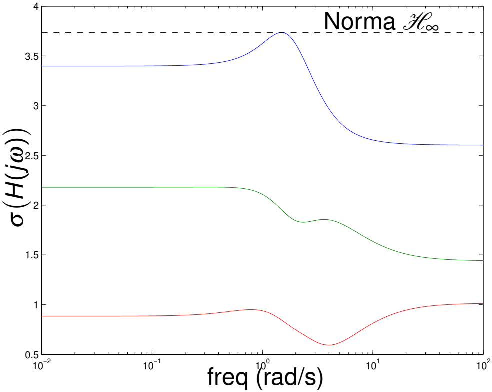
Norma $\mathscr{H}_\infty$: sistemas SISO

- Em sistemas SISO, a norma $\mathscr{H}_\infty$ corresponde ao máximo do diagrama de magnitude de Bode



Norma $\mathscr{H}_\infty$: Sistemas MIMO

- Para sistemas MIMO, a norma $\mathscr{H}_\infty$ é o máximo valor atingido pelo diagrama de valores singulares (função `sigma` no Matlab)
  - Exemplo: $H(s)$ estável com 3 entradas e 4 saídas (3 valores singulares)



  - No Matlab, a norma $\mathscr{H}_\infty$ de um sistema conhecido pode ser computada pelas funções `hinfnorm(sis)` ou `norm(sis,inf)` sendo `sis` um objeto criado com a função `ss`. Exemplo: `sis=ss(A,B,C,D)` com `A,B,C` e `D` matrizes dadas.

Norma $\mathscr{H}_\infty$: ganho $\mathscr{L}_2$

- Considerando que $w(t)$ é um sinal de energia, ou seja,

$$\int_0^\infty w(\tau)'w(\tau)d\tau < +\infty \quad \iff \quad w(t) \in \mathscr{L}_2$$

a norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser caracterizada pelo menor valor de γ tal que

$$\|y(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2 \;\;,\;\; w(t) \in \mathscr{L}_2$$

- De maneira similar, estabelece-se a seguinte equivalência

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma \quad \iff \quad y(t)'y(t) < \gamma^2 w(t)'w(t) \quad , \quad w(t) \in \mathscr{L}_2$$

Bounded Real Lemma

- Para um sistema estável, a norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser caracterizada por meio da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, $P = P' > 0$, impondo-se (com $x(0) = 0$)

$$\dot{v} + y'y - \gamma^2 w'w < 0$$

- levando em conta as equações do sistema, tem-se

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0$$

- ("*Bounded real lemma*") A é assintoticamente estável e $\|H\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

- Outras formas equivalentes poderiam ser obtidas. Por exemplo, aplicando complemento de Schur, transformação de congruência e mudança de variável, tem-se

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\mathbf{I} & D' \\ C & D & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Bounded Real Lemma: Manipulações

- Para $\gamma > 0$, existe $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma^2 \mathbf{I} & D' \\ C & D & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{(complemento de Schur)}$$

se e somente se existir $(\gamma^{-2}P) = (\gamma^{-2}P)' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma^2 \mathbf{I} & D' \\ C & D & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A'(\gamma^{-2}P) + (\gamma^{-2}P)A & (\gamma^{-2}P)B & C' \\ B'(\gamma^{-2}P) & -\mathbf{I} & D' \\ C & D & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Norma $\mathscr{H}_\infty$ por LMIs

- a norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização.

Defina $\mu = \gamma^2$ e resolva

$$\min_{P=P'>0} \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ B'P+D'C & D'D-\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

- Como $\|H(s)\|_\infty = \|H(s)'\|_\infty$, também pode ser calculada a partir do seguinte problema de otimização (dual)

$$\min_{W=W'>0} \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AW+WA'+BB' & WC'+BD' \\ CW+DB' & DD'-\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Condições estendidas pelo Lema de Finsler

- Usando o Lema de Finsler, condições equivalentes para o cômputo de norma $\mathscr{H}_\infty$ podem ser obtidas

Defina

$$\mathscr{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} ; \ \mathscr{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A & \mathbf{0} & -B \\ \mathbf{0} & -C & \mathbf{I} & -D \end{bmatrix} ; \ \xi = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- Existe $P = P' > 0$ tal que

$$\xi'\mathscr{Q}\xi < 0 \quad \forall\, \xi \ : \ \mathscr{B}\xi = \mathbf{0}$$

se e somente se existir $P = P' > 0$ e $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(2n+p+m)\times(n+p)}$ tal que

$$\mathscr{Q} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}' < 0$$

- Note que $\xi'\mathscr{Q}\xi = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} + y'y - \mu w'w$

Condições estendidas: LMIs na forma não compacta

- poderia ser formulado diretamente em termos das submatrizes de $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(2n+p+m)\times(n+p)}$

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} F_1 & G_1 \\ F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \\ F_4 & G_4 \end{bmatrix} ; \quad \begin{array}{c} F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, G_1, G_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}, F_3 \in \mathbb{R}^{p\times n}, \\ F_4 \in \mathbb{R}^{m\times n}, G_3 \in \mathbb{R}^{p\times p}, G_4 \in \mathbb{R}^{m\times p} \end{array}$$

$$\min_{\substack{\mu, F_1, F_2, F_3, F_4 \\ G_1, G_2, G_3, G_4, P=P'>0}} \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} F_1+F_1' & P-F_1A-G_1C+F_2' & G_1+F_3' & -F_1B-G_1D+F_4' \\ \star & -F_2A-A'F_2'-G_2C-C'G_2' & G_2-A'F_3'-C'G_3' & -F_2B-G_2D-A'F_4'-C'G_4' \\ \star & \star & G_3+G_3'+\mathbf{I} & -F_3B-G_3D+G_4' \\ \star & \star & \star & -F_4B-B'F_4'-G_4D-D'G_4'-\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

Norma $\mathscr{H}_\infty$ para sistemas discretos no tempo

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \quad (4)$$
$$y(k) = Cx(k) + Dw(k) \quad (5)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$ representando o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ uma entrada exógena e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida.

- A matriz de transferência de w para y é dada por

$$H(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

e a norma $\mathscr{H}_\infty$ é definida como

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi,\pi]} \sigma_{max}\big(H(\exp(j\omega))\big)$$

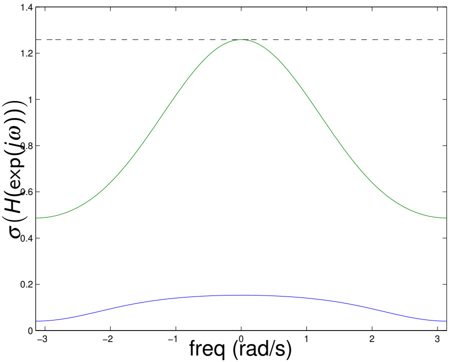
Norma $\mathscr{H}_\infty$

- Considerando-se que $w(k)$ é um sinal de energia, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} w(k)'w(k) < +\infty \iff w(k) \in \ell_2$$

a norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser caracterizada pela relação

$$\|H(z)\|_\infty < \gamma \iff y(k)'y(k) < \gamma^2 w(k)'w(k) \ , \quad w \in \ell_2$$



Bounded real lemma: caso discreto

- Para sistemas estáveis, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser caracterizada por meio da como função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ impondo-se

$$x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + y(k)'y(k) - \gamma^2 w(k)'w(k) < 0$$

- levando em conta as equações do sistema, tem-se

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0$$

- (“*Bounded real lemma*” — caso discreto) A é assintoticamente estável e $\|H\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Bounded real lemma: manipulações

- Para $\gamma > 0$, existe $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'PA - P & A'PB \\ B'PA & B'PB - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A'P \\ B'P \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} PA & PB \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} & \mathbf{I} \end{array}\right] > 0$$

$$\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} & D' \\ C & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A'P \\ B'P \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} PA & PB & \mathbf{0} \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' & A'P \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} & D' & B'P \\ C & D & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ PA & PB & \mathbf{0} & P \end{bmatrix} > 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' & A'P \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} & D' & B'P \\ C & D & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ PA & PB & \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} x'Px + x'C'z + x'A'Pw + \gamma^2 y'y + y'D'z \\ + y'B'Pw + z'Cx + z'Dy + z'z \\ + w'PAx + w'PBy + w'Pw > 0 \end{array} \right.$$

Bounded real lemma: manipulações

- se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que (rearranjando o vetor para $\begin{bmatrix} x' & w' & y' & z' \end{bmatrix}'$, o que equivale a trocar — linhas e colunas — 2 com 3, e depois 2 com 4; ou 2 com 4, e depois 3 com 4)

$$\begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \gamma^2\mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

- se e somente se existir $(\gamma^{-2}P) = (\gamma^{-2}P)' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \gamma^2\mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\gamma^{-2}P) & A'(\gamma^{-2}P) & \mathbf{0} & C' \\ (\gamma^{-2}P)A & (\gamma^{-2}P) & (\gamma^{-2}P)B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'(\gamma^{-2}P) & \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Bounded real lemma: manipulações

- As trocas de linhas e colunas poderiam ser feitas por operações "bloco"-elementares

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{troca linha 2 com 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\text{troca linha 2 com 3}} \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' & A'P \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} & D' & B'P \\ C & D & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ PA & PB & \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\text{troca coluna 2 com 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{troca coluna 2 com 4}} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{troca linha 3 com 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{troca linha 2 com 4}} \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' & A'P \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} & D' & B'P \\ C & D & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ PA & PB & \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{troca coluna 2 com 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\text{troca coluna 3 com 4}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' & A'P \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} & D' & B'P \\ C & D & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ PA & PB & \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \gamma^2\mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Norma $\mathscr{H}_\infty$ por LMIs

- a norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização

Defina $\mu = \gamma^2$ e resolva

$$\min_{P=P'>0} \mu \quad \text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

- Ou, como $\|H(s)\|_\infty = \|H(s)'\|_\infty$

$$\min_{W=W'>0} \mu \quad \text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} W & AW & \mathbf{0} & B \\ WA' & W & WC' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & CW & \mathbf{I} & D \\ B' & \mathbf{0} & D' & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Condição estendida pelo Lema de Finsler

- Usando o Lema de Finsler, condições equivalentes para o cômputo de norma $\mathscr{H}_\infty$ podem ser obtidas

Defina

$$\mathscr{Q} = \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} ; \mathscr{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A & \mathbf{0} & -B \\ \mathbf{0} & -C & \mathbf{I} & -D \end{bmatrix} ; \xi = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ y(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$$

- Existe $P = P' > 0$ tal que

$$\xi' \mathscr{Q} \xi < 0 \quad \forall\, \xi \ : \ \mathscr{B}\xi = \mathbf{0}$$

se e somente se existir $P = P' > 0$ e $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(2n+p+m)\times(n+p)}$ tal que

$$\mathscr{Q} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}' < 0$$

- Note que $\xi'\mathscr{Q}\xi = x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + y(k)'y(k) - \mu w(k)'w(k)$

Condição estendida: forma não compacta

- poderia ser formulado diretamente em termos das submatrizes de $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(2n+p+m)\times(n+p)}$

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} F_1 & G_1 \\ F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \\ F_4 & G_4 \end{bmatrix} ; \quad \begin{array}{c} F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, G_1, G_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}, F_3 \in \mathbb{R}^{p\times n}, \\ F_4 \in \mathbb{R}^{m\times n}, G_3 \in \mathbb{R}^{p\times p}, G_4 \in \mathbb{R}^{m\times p} \end{array}$$

$$\min_{\substack{\mu, F_1, F_2, F_3, F_4 \\ G_1, G_2, G_3, G_4, P = P' > 0}} \mu$$

$$\begin{bmatrix} P + F_1 + F_1' & -F_1 A - G_1 C + F_2' & G_1 + F_3' & -F_1 B - G_1 D + F_4' \\ \star & -P - F_2 A - A' F_2' - G_2 C - C' G_2' & G_2 - A' F_3' - C' G_3' & -F_2 B - G_2 D - A' F_4' - C' G_4' \\ \star & \star & G_3 + G_3' + \mathbf{I} & -F_3 B - G_3 D + G_4' \\ \star & \star & \star & -F_4 B - B' F_4' - G_4 D - D' G_4' - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

- $F_1 = -P$, $G_3 = -\mathbf{I}$, $P = P$ e zerando os demais blocos, recai-se no "bounded real lemma"