Lista 7b – Sistemas discretos no tempo

7b.1 Certifique a estabilidade robusta do seguinte sistema linear discreto variante no tempo

$$x(k+1) = \alpha_1(k)\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} + \alpha_2(k)\begin{bmatrix} 0.5131 & 0 \\ 1 & 0.5131 \end{bmatrix}, \quad \alpha(k) \in \Delta_N,\ \forall k \geq 0,$$

sendo que $\alpha_1(k)$ e $\alpha_2(k)$ podem variar arbitrariamente.

7b.2 Considere a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'P(\alpha)x$ com as seguintes estruturas para a matriz de Lyapunov

$$(a)\ \ P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(k)P_i, \qquad\qquad (b)\ \ P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i(k)\alpha_j(k+1)P_{ij}$$

Programe as LMIs para testar a existência dessas duas classes de matrizes de Lyapunov e aplique os programas resultantes em uma base de 100 politopos estáveis gerados aleatoriamente com $|\lambda_{max}(A(\alpha))| \approx 0.9$ para as dimensões $n = 3$ e $N = 3$.

7b.3 Considere a seguinte operação:

$$\{1,2\}\times\{1,2\}\times\{1,2\} = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}.$$

Essa operação é conhecida como produto Cartesiano. Desenvolva um programa em Matlab que calcule

$$\underbrace{\{1,\ldots,N\}\times\{1,\ldots,N\}\times\cdots\times\{1,\ldots,N\}}_{L \text{ vezes}}, \quad L \geq 1, \quad N \geq 2$$

Considerações: (1)- Observe que o conjunto solução do exemplo pode ser colocado na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) Estude e use a função `kron` do Matlab para construir o programa.

7b.4 Usando o programa desenvolvido no exercício anterior, faça um programa em Matlab para testar a estabilidade robusta de um sistema linear discreto variante no tempo com taxas de variações arbitrárias usando a seguinte matriz de Lyapunov candidata

$$P(\alpha) = \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_L=1}^{N} \alpha_{i_1}(k)\alpha_{i_2}(k+1)\cdots\alpha_{i_L}(k+L-1)P_{i_1 i_2\cdots i_L},$$

com $L \geq 1$ arbitrário.

7b.5 Faça um programa em Matlab que construa sistematicamente as colunas h^j, $j = 1,\ldots,M$ do conjunto Γ para um sistema com N e b arbitrários. Utilize a rotina `Polyhedron` do *Multi-Parametric toolbox*[1] para gerar os vértices h^j a partir das restrições lineares $\mathbb{A}x \leq b$ e $\mathbb{A}_e = b_e$, com $\mathbb{A}$, b, $\mathbb{A}_e$ e b_e dados na equação (7) dos *slides* da aula.

7b.6 Repita novamente o exercício anterior considerando agora a região de factibilidade do par $(\alpha_i, \Delta\alpha_i)$ apresentada na Figura 1.

[1] `https://www.mpt3.org/`

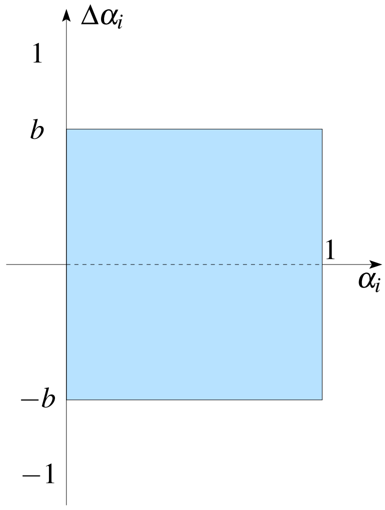

Figura 1: Região de factibilidade do par $(\alpha_i, \Delta\alpha_i)$.

7b.7 Dados os vetores h^j, $j = 1, \dots, M$, determine as expressões que convertem as matrizes

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \qquad P(\alpha + \Delta\alpha) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) P_i$$

para o domínio γ.

7b.8 Gere 50 politopos estáveis com $|\lambda_{max}(A(\alpha))| \approx 0.9$ para as dimensões $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$. Aplique os programas de estabilidade robusta baseados na matriz de Lyapunov dada em 7b.7 considerando os vetores h^j gerados em 7b.5 e 7b.6 com $b_i = 0.5,\ i = 1, \dots, N$. Qual conjunto de vetores h^j forneceu os resultados menos conservadores na média? Forneça argumentos que corroborem a sua afirmação.

7b.9 Considere a seguinte LMI dependente de parâmetros

$$\mathscr{Q}(\alpha) + X(\alpha)\mathscr{B}(\alpha) + \mathscr{B}(\alpha)' X(\alpha)' < 0$$

com

$$\mathscr{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\alpha + \Delta\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathscr{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & I \end{bmatrix}, \quad P(\alpha) > 0$$

e $P(\alpha)$ dada em 7b.7. Primeiramente, programe as condições LMIs considerando $X(\alpha)$ com a mesma estrutura de $P(\alpha)$, ou seja, afim nos parâmetros α. Como segundo passo, faça um novo programa considerando

$$X(\alpha) = X(\gamma) = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i X_i,$$

ou seja, as variáveis de folga são criadas diretamente no domínio γ, não necessitando de conversão. Compare as duas condições usando a base de politopos gerada no exercício 7b.8. Qual condição foi menos conservadora? Argumente.

7b.10 Considere as restrições

$$0 \le \alpha_1(k) \le 1, \quad 0 \le \alpha_1(k+1) \le 1, -1 \le \underline{b}_1 \le \alpha_1(k+1) - \alpha_i(k) \le \overline{b}_1 \le 1, \quad \overline{b}_1 > \underline{b}_1,\ 0 \in [\underline{b}_1, \overline{b}_1]$$

Defina os vértices da região que define o espaço factível do par $(\alpha_1(k), \alpha_1(k+1))$ em função de $\underline{b}_1$ e $\overline{b}_1$.