Lista 5

5.1 Considerando as condições do Teorema 1, Lemas 1 a 4, apresente uma tabela que apresente o número de variáveis escalares (V) e o número de linhas de LMIs (L) para todas essas condições. Os valores devem ser expressos em termos do número de estados n e do número de vértices N.

5.2 Estenda a condição do Lema 2 para tratar V como uma matriz afim em α, isto é, $V(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i V_i$. Use a mesma lógica utilizada no Lema 4.

5.3 Gere 50 politopos estáveis para $n = 2, 3, 4$, $N = 2, 3, 4$ usando o programa de geraçao de politopos estáveis com $d = 0.05$ e teste as condições de estabilidade robusta da aula `relax_lmi` adequadas a sistemas contínuos no tempo (inclusive as extensões solicitadas nesta lista). Descreva o resultado em uma tabela (número de avaliações positivas de cada teste), computando também o tempo médio de solução (apenas as avaliações positivas são consideradas) para cada para (n, N).

5.4 Apresente o conjunto de LMIs necessário para testar a estabilidade quadrática associada a sistemas discretos politópicos, isto é, as LMIs para testar

$$\begin{bmatrix} P & A(\alpha)'P \\ PA(\alpha) & P \end{bmatrix} > 0, \qquad \alpha \in \Lambda_N$$

Programe essa condição.

5.5 Estenda e programe as condições do Lema 1 para tratar sistemas politópicos discretos.

5.6 Seja $P(\alpha)$ uma matriz afim em α, e o teste de estabilidade robusta associado a sistemas discretos politópicos

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad P(\alpha) > 0$$

- Considerando $N = 2$, a condição de estabilidade é escrita na forma

  $$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) = \alpha_1^3(T_1) + \alpha_1^2\alpha_2(T_2) + \alpha_1\alpha_2^2(T_3) + \alpha_2^2(T_4) < 0$$

  Determine as expressões de T_i e programe as condições que garantem a estabilidade robusta, isto é, $T_i < 0$, $i = 1, \ldots, 4$, $P_1 > 0$, $P_2 > 0$. Dica: Para que os termos de $P(\alpha)$ (polinômio de grau 1) possam ser agrupados com os termos de $A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)$ (polinômio de grau 3), considere $P(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 P(\alpha)$, uma vez que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

- Repita o procedimento para $N = 3$.

5.7 Gere 50 politopos estáveis para $n = 2, 3, 4$, $N = 2, 3$ usando o programa de geração de politopos estáveis com $d = 0.98$ e teste as condições de estabilidade robusta para sistemas discretos desenvolvidas nos exercícios anteriores. Descreva o resultado em uma tabela (número de avaliações positivas de cada teste), computando também o tempo médio de solução (apenas as avaliações positivas são consideradas) para cada para (n, N).

5.8 Seja a condição de Schur estabilidade para uma matriz $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) \\ P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0$$

com $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Determine $\bar{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\bar{P}(\alpha) = \bar{P}(\alpha)' \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que

$$-\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) \\ P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix} = \bar{A}(\alpha)'\bar{P}(\alpha) + \bar{P}(\alpha)\bar{A}(\alpha)$$

Usando as estruturas obtidas, estenda as condições do Lema 2 para tratar sistemas discretos no tempo considerando: (a) V fixa; (b) $V(\alpha)$ afim em α

5.9 Seja a matriz incerta na forma afim

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2, \quad \theta_i \in [-1, 1],\ i = 1, 2$$

(a) Adotando as mudanças de variáveis $\theta_1 = 2\alpha_1 - 1$ e $\theta_2 = 2\beta_1 - 1$ com $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda_2$ e $(\beta_1, \beta_2) \in \Lambda_2$, reescreva a matriz $A(\theta)$ em termos de uma matriz $A(\alpha, \beta)$ homogênea de grau um tanto em α quanto em β.

(b) Forneça uma condição LMI para testar a estabilidade Hurwitz de $A(\alpha, \beta)$ utilizando uma matriz de Lyapunov na forma $P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$.

(c) Repitam o item (b) utilizando $P(\alpha, \beta) = \alpha_1\beta_1 P_1 + \alpha_1\beta_2 P_2 + \alpha_2\beta_1 P_3 + \alpha_3\beta_3 P_4$.