Lista 10 – Realimentação estática de saída

Sistemas Contínuos

Matrizes A, B e C usadas para testes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -7 & -11 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 & 5 \\ -5 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

10.1 Usando as condições LMI do Lema 2, determine um ganho estabilizante $u(t) = Ly(t)$ para o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{6}$$

com as matrizes (A,B,C) dadas por: a) (1) b) (2) c) (3)

10.2 Repita o exercício anterior para as matrizes (A,B,C) dadas por: a) (4) b) (5). Note que para aplicar as condições do Lema 2 nesses casos é necessário transformar o sistema de modo que a matriz C fique na forma $C = [\mathbf{I}_p \;\; 0_{p\times n-p}]$. Sugestão de transformação: $T^{-1} = [C'(CC')^{-1} \;\; C^{\perp}]$, sendo $C^{\perp}$ uma base para o espaço nulo de C.

10.3 Adapte as condições LMIs dos Lemas 7 e 8 da aula de realimentação de estados para trabalhar com o problema de realimentação estática de saída $\mathscr{H}_2$ (restrições de estrutura em W e Z). Aplique as duas condições nas matrizes $(A, B = B_2, C)$ dadas em (3) considerando também $B_1 = 0.1\mathbf{I}_3$, $D = [0.1 \;\; 0.1]$. Os custos garantidos $\mathscr{H}_2$ obtidos foram iguais? Comente.

10.4 Repita o exercício anterior para as matrizes $(A, B = B_2, C)$ dadas em (2) considerando $B_1 = 0.1\mathbf{I}_3$, $D = 0.1$. Como o sistema é SISO, faça uma busca unidimensional exaustiva no ganho $L \in \mathbb{R}$ e determine o seu valor ótimo com três casas decimais de precisão. O valor ótimo coincide com os valores obtidos com as condições LMIs? Seria possível construir as matrizes $W = diag(W_{11}, W_{22})$ e $Z = [Z_{11} \;\; 0]$ de modo que as condições LMIs fossem factíveis para o valor do ganho ótimo? Exemplo: Se o ganho ótimo fosse $L = X$, com $X > 0$, as LMIs poderiam ser testadas com $W = (1, W_{22})$ e $Z = [X \;\; 0]$ ou $W = (X^{-1}, W_{22})$ e $Z = [1 \;\; 0]$.

10.5 Adapte as condições LMIs do Lema 8 da aula de realimentação de estados para trabalhar com o problema de realimentação estática de saída $\mathscr{H}_\infty$ (restrições de estrutura em W e Z). Aplique as condições nas matrizes $(A, B = B_2, C)$ dadas em (5) considerando também $B_1 = 0.1\mathbf{I}_4$, $D = [0.1 \;\; 0.1]$. Teste com a transformação T

apresentada em 9.2 a com outras transformações do tipo $T = [\ C\ ;\ R\ ]$, com R tal que T^{-1} exista, e compute os custos garantidos $\mathscr{H}_\infty$.

10.6 Repita o exercício anterior considerando a seguinte matriz de saída: $C = [\mathbf{I}_3\ \ 0_{3\times 1}]$. Teste com transformações do tipo $T = [\ C\ ;\ R\ ]$, computando os custos garantidos $\mathscr{H}_\infty$ resultantes. A variação dos custos garantidos é maior ou menor do que no exercício anterior, no qual o sistema tinha apenas uma saída?

10.7 Considere as seguintes matrizes (A,B,C) associadas ao sistema linear (6):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}\ ;\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ;\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontre um ganho de realimentação estática de saída que estabiliza o sistema usando condições LMIs.

10.8 Adapte as condições do Lema 3 para trabalhar com sistemas incertos politópicos considerando: $A \to A_i$, $B \to B_i$, $C \to C_i$, $P \to P_i$. Adotando as condições de estabilização quadrática $\mathscr{H}_\infty$ por realimentação de estados (Lema 31 da aula de realimentação de estados) no primeiro estágio, encontre um ganho estabilizante por realimentação de saída para as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}\ ;\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}\ ;\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\ ;\ B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ;\ C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

considerando também as matrizes $B_{1i} = 0.1\mathbf{I}_3$, $D_{1i} = \mathbf{0}_{1\times 3}$, $D_{2i} = 0$ no primeiro estágio. Como a matriz C é precisamente conhecida, tente encontrar o ganho diretamente usando as condições do Lema 2 adaptadas para o caso incerto.

10.9 Considere a base de 100 sistemas lineares politópicos a tempo contínuo com as dimensões $n = 4$, $N = 2,\ldots,4$, $m = 1,\ldots,n-1$ disponível para *download* em: `http://www.dt.fee.unicamp.br/~peres/ia360e/base_ssf.zip`. Adapte as condições dos Lemas 25 (baseada no lema da projeção) e 26 (baseada no lema de Finsler) da aula de realimentação de estados para tratar do problema de realimentação estática de saída (impondo restrições de estrutura nas variáveis). Aplique as condições resultantes juntamente com a condição do Lema 2 adaptada para o caso incerto na base de politopos considerando as seguintes matrizes de saída para todos os politopos da base: (a) $C = [I_1\ \ \mathbf{0}_{1\times 3}]$ (b) $C = [I_2\ \ \mathbf{0}_{2\times 2}]$ (c) $C = [I_3\ \ \mathbf{0}_{3\times 1}]$. Qual condição foi menos conservadora na média em cada caso? Nota: A condição baseada no lema de Finsler deverá ser testada apenas para $\xi = 1$.

10.10 Implemente um algoritmo em dois passos, baseado no Lema 3 da aula de realimentação de saída, tendo como entrada um ganho estabilizante de realimentação de estados, e rode novamente os exemplos numéricos acima (inclusive o da base de politopos).

10.11 Implemente um algoritmo em dois passos, baseado no Lema 5 da aula de realimentação de saída, tendo como entrada um ganho estabilizante de realimentação de estados, e rode novamente os exemplos numéricos considerando as matrizes do problema $\mathscr{H}_\infty$ como randômicas. Componha um novo ganho estabilizante de realimentação de estados a partir do ganho de realimentação estática de saída e da matriz de saída, ou seja, $K = LC_2$, e faça iterações nas condições do Lema 5 visando diminuir o limitante da norma $\mathscr{H}_\infty$.

Sistemas Discretos

Matrizes A, B e C usadas para testes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\ ;\ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}\ ;\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

10.12 Adapte as condições do Lema 10 da aula de realimentação de estados para tratar do problema de realimentação estática de saída do sistema discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{12}$$

Aplique as condições nas matrizes (a) (7) (b) (8) (c) (9) (d) (10) (e) (11). Use a transformação $T^{-1} = [C'(CC')^{-1} \;\; C^{\perp}]$ se necessário.

10.13 Repita o exercício anterior usando a adaptação do Lema 12 (baseada no lema de Finsler) da aula de realimentação de estados para tratar do problema de realimentação estática de saída. Existiu algum caso em que somente a condição baseada em Finsler encontrou um ganho estabilizante? Se sim, explique.

10.14 Adapte as condições LMIs dos Lemas 13 e 14 da aula de realimentação de estados para trabalhar com o problema de realimentação estática de saída $\mathscr{H}_2$ (restrições de estrutura em W e Z). Aplique as duas condições nas matrizes $(A, B = B_2, C)$ dadas em (9) considerando também $B_1 = 0.1\mathbf{I}_3$, $D = \mathbf{0}_2$.

10.15 Repita o exercício anterior usando a adaptação dos Lemas 15 e 16 (baseados no lema de Finsler) da aula de realimentação de estados para trabalhar com o problema de realimentação estática de saída $\mathscr{H}_2$ (restrições de estrutura em G e Z). Os custos garantidos $\mathscr{H}_2$ obtidos foram menores do que os obtidos no exercício anterior? Explique.

10.16 Adapte as condições do Lema 4 para trabalhar com sistemas incertos politópicos considerando: $A \to A_i$, $B \to B_i$, $C \to C_i$, $P \to P_i$. Adotando as condições de estabilização quadrática $\mathscr{H}_2$ por realimentação de estados (Lema 29 da aula de realimentação de estados) no primeiro estágio, encontre um ganho estabilizante por realimentação de saída para um sistema discreto politópico com as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.8 & -0.1 \\ 0.9 & -0.6 & -0.8 \\ 0.0 & 0.5 & -1.4 \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -1.0 & 0.6 \\ 0.1 & -0.9 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} \;;\; B_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -1.5 \\ -0.3 \end{bmatrix} \;;\; B_2 = \begin{bmatrix} -1.3 \\ 2.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

considerando também as matrizes $B_{1i} = 0.1\mathbf{I}_3$, $D_i = \mathbf{0}_{2\times 1}$ no primeiro estágio. As condições de estabilização por realimentação de saída adaptadas dos Lemas 22 e 23 da aula de realimentação de estados são capazes de encontrar ganhos estabilizantes?

10.17 Implemente um algoritmo em dois passos, baseado no Lema 6 da aula de realimentação de saída, tendo como entrada um ganho estabilizante de realimentação de estados, e rode novamente os exemplos numéricos acima.

10.18 Implemente um algoritmo em dois passos, baseado no Lema 7 da aula de realimentação de saída, tendo como entrada um ganho estabilizante de realimentação de estados, e rode novamente os exemplos numéricos considerando as matrizes do problema $\mathscr{H}_\infty$ como randômicas. Componha um novo ganho estabilizante de realimentação de estados a partir do ganho de realimentação estática de saída e da matriz de saída, ou seja, $K = LC_2$, e faça iterações nas condições do Lema 7 visando diminuir o limitante da norma $\mathscr{H}_\infty$.

10.19 Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

e a lei de controle $u = Ly$. Partindo da representação descritora da dinâmica

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -KC & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \Rightarrow E\dot{\xi} = \bar{A}\xi$$

formule a busca do ganho L em termos de LMIs. Utilize como base o procedimento apresentado no slide 32 da Aula 1.