Lista 0

0.1 Dada uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mostre que $\mathbf{Tr}(MX)$ é uma função linear dos elementos da matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

0.2 Mostre que toda matriz simétrica $A = A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem autovalores reais.

0.3 Mostre que toda matriz simétrica $A = A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável.

0.4 Mostre que toda matriz simétrica $A = A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem autovetores ortogonais.

0.5 Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possui autovalores λ_i, $i = 1,\ldots,n$ distintos, então os autovetores v_i, $i = 1,\ldots,n$ formam um conjunto linearmente independente.

0.6 Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possui autovalores λ_i, $i = 1,\ldots,n$ distintos, então existe uma transformação de similaridade que diagonaliza A.

0.7 Mostre que:

a) $\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & \mathrm{I} \end{array}\right]\right) = \det(A)$

b) $\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]\right) = \det(A)\det(C)$

c) $$\begin{aligned}\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\right) &= \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \;\; \text{se } A^{-1} \text{ existir} \\ &= \det(D)\det(A - BD^{-1}C) \;\; \text{se } D^{-1} \text{ existir}\end{aligned}$$

0.8 Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica (isto é, $M = M'$) com uma matriz anti-simétrica ($M = -M'$)

0.9 Mostre que $\mathbf{Tr}\ (AB) = \mathbf{Tr}\ (BA)$, $A \in \Re^{n\times n}$ e $B \in \Re^{n\times n}$

0.10 Mostre que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$, $A \in \Re^{n\times n}$ e $B \in \Re^{n\times n}$.

0.11 Mostre que a equação característica de uma matriz $A \in \Re^{2\times 2}$ é dada por

$$\lambda^2 - \mathbf{Tr}\ (A)\lambda + \det(A) = 0$$

0.12 Mostre que matrizes similares possuem o mesmo polinômio característico e, conseqüentemente, o mesmo conjunto de autovalores.

0.13 Mostre que para qualquer matriz $A \in \Re^{n\times n}$

$$\mathbf{Tr}\ (A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

sendo que λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são os autovalores de A.

0.14 Mostre que uma matriz quadrada é não singular se e somente se não possuir nenhum autovalor nulo.

0.15 Seja A uma matriz com autovalores distintos, e q^i um autovetor à direira de A, associado a λ_i, isto é, $Aq^i = \lambda_i q^i$. Defina $Q \triangleq \begin{bmatrix} q^1 & q^2 & \cdots & q^n \end{bmatrix}$ e

$$P \triangleq Q^{-1} = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^n \end{bmatrix}$$

sendo que p^i é a i-ésima linha de P. Mostre que p^i é um autovetor à esquerda de A associado com λ_i, isto é, $p^i A = \lambda_i p^i$.

0.16 Seja $A \in \Re^{n \times n}$ e (λ_i, q^i), (β_i, p^i), $i = 1, 2, \ldots, n$ os pares de autovalores-autovetores à direita e à esquerda de A, isto é,

$$\begin{aligned} Aq^i &= \lambda_i q^i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ p^i A &= \beta_i p^i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

sendo que q^i e p^i são, respectivamente, vetores coluna e linha de dimensão n.

a) Mostre que $\lambda_i = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) Mostre que, para quaisquer dois autovalores distintos de A, o autovetor à esquerda de um autovalor é ortogonal ao autovetor à direita do outro;

0.17 Mostre que uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana (isto é, a matriz A é igual à sua conjugada transposta) possui autovalores reais.

0.18 Mostre que matrizes similares possuem o mesmo traço.

0.19 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

com a e b reais.

a) Encontre os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz A

b) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são autovetores de A independentemente dos valores de a e b

0.20 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Mostre que se A é definida positiva, então $ac > |b|^2$

0.21 Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Determine o rank de A

b) Determine a dimensão do espaço nulo de A ($\mathcal{N}(A) \triangleq \{x : Ax = 0\}$)

c) Obtenha uma base para o range de A ($\mathcal{R}(A) \triangleq \{y : y = Ax\}$)

d) Obtenha uma base para o espaço nulo de A

0.22 Compute os autovalores e autovetores de

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

0.23 Determine a positividade das matrizes

a) $A = \begin{bmatrix} 48 & -28 & 50 \\ -28 & 8 & -30 \\ 50 & -30 & 88 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & -24 \\ 9 & -24 & 18 \end{bmatrix}$