IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 11: adendo

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2021

Tópicos

Realimentação dinâmica de saída estabilizante

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B_2(\alpha)u \\ y &= C_2(\alpha)x \end{aligned}$$

e o controlador dinâmico por realimentação de saída

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned}$$

Conectando os dois sistemas, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) + B_2(\alpha)D_c C_2(\alpha) & B_2(\alpha)C_c \\ B_c C_2(\alpha) & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

Que também pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}(\alpha)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & B_2(\alpha) \\ I_{n_c} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}}_{K_{n_c}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}(\alpha)}$$

Utilizando essa última representação, é possível projetar um controlador dinâmico de saída estabilizante K_{n_c} (ordem n_c) com as condições de realimentação estática de saída utilizando as matrizes aumentadas $\tilde{A}(\alpha)$, $\tilde{B}(\alpha)$ e $\tilde{C}(\alpha)$.

Estratégia de dois estágios

Uma maneira de projetar o ganho robust K_{n_c} é utilizar a metodologia de projeto robusto baseada em dois estágios. No primeiro estágio é necessário projetar um ganho de realimentação de estados. Utilizando a estabilidade quadrática, tem-se a seguintes LMIs

$$\tilde{A}(\alpha)W + W\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)Z + Z'\tilde{B}(\alpha)' < 0, \quad W > 0$$

Caso exista uma solução, o ganho é dado por $K_c = ZW^{-1}$.
Exemplo: Considere as seguintes matrizes para o sistema

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.0 & -0.8 \\ 0.9 & -0.1 & 0.8 \\ -0.2 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -1.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.9 & -0.5 \\ -0.8 & -0.1 & -0.3 \\ 0.3 & 0.7 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ -0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Efeito de “blocagem”

Para $n_c = \{0,1,2,3\}$, tem-se os seguintes controladores quadraticamente estabilizantes

$$K_{n_c=0} = \begin{bmatrix} 1.44 & 20.77 & 21.15 \end{bmatrix}$$

$$K_{n_c=1} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.50 \\ 1.44 & 20.77 & 21.15 & -0.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{n_c=2} = \begin{bmatrix} -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.50 \\ 1.44 & 20.77 & 21.15 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{n_c=3} = \begin{bmatrix} 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.50 & -0.00 & -0.00 \\ -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.50 & 0.00 \\ -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.50 \\ 1.44 & 20.77 & 21.15 & -0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Estratégia de “desblocagem”

Considere a seguinte matriz de malha fechada equivalente para o problema de realimentação de estados

$$\dot{x} = \left(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)T^{-1}TK_{n_c}\right), \qquad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix}, \; T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}$$

Na desigualdade de Lyapunov, tem-se

$$\tilde{A}(\alpha)W + W\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)T^{-1}TK_{n_c}W + WK_{n_c}'T'T^{-1'}\tilde{B}(\alpha)' < 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A}(\alpha)W + W\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)T^{-1}TZ + Z'T'T^{-1'}\tilde{B}(\alpha)' < 0,$$

com $Z = K_{n_c}W$. Para o produto TZ podemos adotar a seguinte estrutura particular

$$TZ = \tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_3 Y & \tilde{Z}_3 \\ \tilde{Z}_2 & \tilde{Z}_4 \end{bmatrix}$$

Assim, o produto $\tilde{B}(\alpha)T^{-1}\tilde{Z}$ fornece

$$\begin{bmatrix} B_2(\alpha)X\tilde{Z}_3Y + B_2(\alpha)\tilde{Z}_2 & B_2(\alpha)X\tilde{Z}_3 + B_2(\alpha)\tilde{Z}_4 \\ \tilde{Z}_3 Y & \tilde{Z}_3 \end{bmatrix}$$

Estratégia de "desblocagem"

Adotando a mudança de variável $Q = X\tilde{Z}_3$ tem-se

$$\begin{bmatrix} B_2(\alpha)QY + B_2(\alpha)\tilde{Z}_2 & B_2(\alpha)Q + B_2(\alpha)\tilde{Z}_4 \\ \tilde{Z}_3 Y & \tilde{Z}_3 \end{bmatrix}$$

Escolhendo $Y = \beta \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times (n-n_c)} \end{bmatrix}$, tem-se a desigualdade de Lyapunov linearizada (LMIs). O ganho de realimentação de estados K pode ser recuperado por meio das seguintes mudanças de variáveis:

$$X = Q\tilde{Z}_3^{-1}, \quad Z = T^{-1}\tilde{Z}, \quad K = ZW^{-1}$$

Aplicando as condições de estabilização quadrática modificada, tem-se os seguintes controladores

$$K_{n_c=1} = \begin{bmatrix} -0.22 & -0.46 & -0.41 & -0.17 \\ 1.00 & 24.77 & 26.17 & 1.93 \end{bmatrix}$$

$$K_{n_c=2} = \begin{bmatrix} -0.18 & 1.37 & 1.55 & -0.04 & 0.04 \\ -0.16 & -7.23 & -7.74 & -0.53 & -0.06 \\ 1.23 & 27.54 & 29.10 & 2.27 & -0.91 \end{bmatrix}$$

$$K_{n_c=3} = \begin{bmatrix} -0.14 & 0.92 & 0.95 & -0.11 & 0.07 & -0.11 \\ -0.28 & -6.64 & -6.83 & -0.35 & -0.21 & 0.64 \\ 0.04 & -4.23 & -5.19 & -0.47 & 0.15 & -0.00 \\ 1.44 & 29.29 & 30.99 & 2.14 & -0.64 & -2.15 \end{bmatrix}$$

Comentários

- O escalar β pode ser utilizado para realizar uma busca unidimensional.
- A escolha da matriz Y é arbitrária, e exerce como função principal um ajuste de dimensão.
- O trabalho de linearização foi realizado no produto TKW. O mesmo poderia ser feito no produto TKG, ou seja, usando variáveis de folga para projetar o ganho (Finsler e Lema da projeção).
- Ganhos não “blocados” no primeiro estágio, tendem a fornecer resultados melhores no segundo estágio, por exemplo, nos problemas de realimentação de saída $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$.