IA888- Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

Série de Fourier de Sinais Contínuos

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2014

Definição 1 (Produto escalar)

O produto escalar dos sinais $x(t)$ e $y(t)$ é dado por

$$\langle x(t)y^*(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt$$

O intervalo de integração pode ser distinto, definido no contexto da operação, estando associado ao domínio das funções.

Definição 2 (Norma)

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t)x^*(t)\rangle} \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Exemplo 1.1

Considere os sinais

$$x(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) = tG_1(t-0.5) \quad , \quad g(t) = u(t) - u(t-1) = G_1(t-0.5)$$

O valor de α para que $\alpha g(t)$ melhor aproxime $x(t)$ pode ser obtido como solução de um problema de otimização.

Usando-se a medida de distância entre dois sinais, dada pela integral do quadrado da diferença, tem-se

$$\min_{\alpha} \langle \varepsilon^2(t) \rangle$$

sendo o erro

$$\varepsilon(t) = x(t) - \alpha g(t)$$

e

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_0^1 \varepsilon^2(t) dt$$

Exemplo II

Portanto, a expressão do erro quadrático é

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \langle g^2(t) \rangle \alpha^2 - 2\langle x(t)g(t) \rangle \alpha + \langle x^2(t) \rangle$$

que é um polinômio de segundo grau em α, convexo, com mínimo global satisfazendo

$$\frac{d}{d\alpha}\langle \varepsilon^2(t) \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle x(t)g(t) \rangle}{\langle g^2(t) \rangle} = \frac{1}{2}$$

Observe que $\langle \varepsilon(t)g(t) \rangle = 0$ e que esta condição, imposta no problema, também permite a obtenção do valor ótimo de α.

Sinais ortogonais

Definição 3 (Sinais ortogonais)

Os sinais $x(t)$ e $y(t)$ não nulos são ortogonais se o produto escalar é nulo, isto é

$$\langle x(t)y^*(t)\rangle = 0$$

Propriedade 1 (Teorema de Pitágoras)

Se $x(t)$ e $y(t)$ são ortogonais, então

$$\|x(t)+y(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2$$

pois

$$\|x(t)+y(t)\|^2 = \langle (x(t)+y(t))(x^*(t)+y^*(t))\rangle = \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 + \underbrace{\langle x(t)y^*(t)\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y(t)x^*(t)\rangle}_{=0}$$

Propriedade 2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

$$\langle x(t)y^*(t) + y(t)x^*(t)\rangle \leq 2\|x(t)\|\|y(t)\|$$

pois, para $\alpha \in \mathbb{R}$ *qualquer,*

$$\|x(t) - \alpha y(t)\|^2 \geq \min_{\alpha} \|x(t) - \alpha y(t)\|^2 \geq 0$$

Portanto,

$$\langle (x(t) - \alpha y(t))(x^*(t) - \alpha y^*(t))\rangle = \\ \|x(t)\|^2 + \alpha^2\|y(t)\|^2 - \alpha\langle x(t)y^*(t) + y(t)x^*(t)\rangle \geq 0$$

e o resultado é obtido substituindo-se o valor de α *que minimiza a norma, isto é,*

$$\alpha = \frac{\langle x(t)y^*(t) + y(t)x^*(t)\rangle}{2\|y(t)\|^2}$$

Definição 4 (Sinais linearmente independentes)

Um conjunto de sinais $\{g_k(t), k = 1, \ldots, n\}$ é linearmente independente se e somente se

$$\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(t) = 0 \ , \ \forall t \quad \Longrightarrow \quad c_k = 0 \ , \ k = 1, \ldots, n$$

Definição 5 (Espaço linear)

A combinação linear de um conjunto de n sinais $g_k(t)$, isto é,

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(t)$$

com escalares $c_k \in \mathbb{C}$ gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número r de sinais linearmente independentes do conjunto ($r \leq n$). Qualquer conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é uma base para esse espaço.

Exemplo

Exemplo 1.2

Os sinais são linearmente independentes

$$x_1(t) = 1 \quad , \quad x_2(t) = t$$

Exemplo 1.3

Os sinais

$$x_1(t) = \exp(\lambda_1 t) \quad , \quad x_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$$

são linearmente independentes se e somente se

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Exemplo 1.4

Os sinais

$$x_1(t) = 1 \quad , \quad x_2(t) = t \quad , \quad x_3(t) = 3t - 5$$

são linearmente dependentes, pois

$$x_3(t) = 3x_2(t) - 5x_1(t)$$

Propriedade 3

Sinais ortogonais são linearmente independentes.

Prova:
Supondo que $x(t)$ *e* $y(t)$ *são sinais ortogonais, tem-se*

$$\langle x(t)y^*(t)\rangle = 0 \;\; e \;\; \langle x(t)x^*(t)\rangle \neq 0, \; \langle y(t)y^*(t)\rangle \neq 0$$

Se $c_1x(t) + c_2y(t) = 0$ *para todo* t*, então multiplicando por* $x^*(t)$ *e integrando tem-se*

$$c_1\langle x(t)x^*(t)\rangle + c_2\langle y(t)x^*(t)\rangle = c_1\langle x(t)x^*(t)\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$

Similarmente, multiplicando-se por $y^*(t)$ *mostra-se que* $c_2 = 0$*.*

Definição 6 (Projeção ortogonal)

Denomina-se projeção ortogonal a representação do sinal $x(t)$ no espaço gerado pela combinação linear de uma base do espaço tal que o erro seja nulo ou ortogonal ao espaço, isto é,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(t) + \varepsilon(t)$$

com

$$\langle \varepsilon(t) g_k^*(t) \rangle = 0 \ , \ \forall k$$

sendo $\{g_k(t), k = 1, \ldots, n\}$ um conjunto de sinais linearmente independentes (base de dimensão n).

Propriedade 4

O erro da projeção ortogonal tem norma mínima.

Prova:
Seja $\varepsilon(t)$ o erro da projeção ortogonal e $v(t)$ o erro de uma projeção qualquer. Então,

$$x(t) = \sum_k c_k g_k(t) + \varepsilon(t) = \sum_k d_k g_k(t) + v(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \varepsilon(t) + \underbrace{\sum_k (c_k - d_k) g_k(t)}_{r(t)}$$

O sinal $r(t)$ pertence ao espaço gerado pelas funções $g_k(t)$, e portanto é ortogonal a $\varepsilon(t)$. Assim,

$$\|v(t)\|^2 = \|\varepsilon(t)\|^2 + \|r(t)\|^2 \geq \|\varepsilon(t)\|^2$$

Projeção de sinais I

Suponha que se deseja aproximar o sinal $x(t)$ por uma combinação linear de sinais ortogonais $g_k(t)$

$$x(t) \approx \sum_k c_k g_k(t)$$

Definindo-se o erro $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = x(t) - \sum_k c_k g_k(t)$$

uma forma apropriada de obtenção dos coeficientes c_k's é dada pela minimização do erro quadrático

$$\min_{c_k} \langle \varepsilon(t) \varepsilon^*(t) \rangle$$

Impondo a condição de ortogonalidade do erro em relação ao espaço linear tem-se

$$\langle \varepsilon(t) g_k^*(t) \rangle = 0, \ \forall k$$

Projeção de sinais II

$$\left\langle \varepsilon(t) g_k^*(t) \right\rangle = \left\langle x(t) g_k^*(t) \right\rangle - \sum_{\ell} c_\ell \left\langle g_\ell(t) g_k^*(t) \right\rangle = \left\langle x(t) g_k^*(t) \right\rangle - c_k \left\langle g_k(t) g_k^*(t) \right\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \quad c_k = \frac{\left\langle x(t) g_k^*(t) \right\rangle}{\left\langle |g_k(t)|^2 \right\rangle} \quad , \ \forall k$$

Note que os coeficientes c_k podem ser calculados de maneira desacoplada pelo fato de os sinais $g_k(t)$ serem ortogonais.

Teorema 1 (Teorema de Parseval)

Considere uma base ortogonal $\{g_k(t)\}$ *e* $x(t)$, *um sinal pertencente ao espaço, descrito por* $x(t) = \sum_k c_k g_k(t)$, *então*

$$\langle x(t)x^*(t)\rangle = \langle |x(t)|^2\rangle = \sum_k |c_k|^2 \langle |g_k(t)|^2\rangle$$

Se as funções $g_k(t)$ *têm norma unitária, ou seja, se* $\langle |g_k(t)|^2\rangle = 1$, *tem-se* $\langle |x(t)|^2\rangle = \sum_k |c_k|^2$.

Prova: Como $x^*(t) = \sum_k c_k^* g_k^*(t)$, tem-se

$$\langle x(t)x^*(t)\rangle = \langle |x(t)|^2\rangle = \sum_k |c_k|^2 \langle |g_k(t)|^2\rangle$$

pois os $g_k(t)$'s são ortogonais.

Definição 7 (Sinal periódico)

Um sinal $x(t)$ é periódico se existe um $T > 0$ tal que $x(t) = x(t+T)$ para $\forall t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, T é um período e, se for o menor real que satisfaz a relação, é chamado de período fundamental.

Exemplo 1.5

O período T de

$$x(t) = \text{sen}(8t) + \cos(12t) \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{\pi}{4} \ , \ T_2 = \frac{\pi}{6}$$

é dado por

$$T = pT_1 = qT_2 = p\frac{2\pi}{8} = q\frac{2\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad p = 2, q = 3 \quad \text{e} \quad T = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo

Exemplo 1.6

O período T de

$$x(t) = \text{sen}(6\pi t) + \cos(8\pi t) \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{1}{3}\ ,\ \ T_2 = \frac{1}{4}$$

é dado por

$$T = pT_1 = qT_2 = p\frac{2\pi}{6\pi} = q\frac{2\pi}{8\pi} \quad \Rightarrow \quad p = 3, q = 4 \quad \text{e} \quad T = 1$$

Propriedade 5

A soma de sinais periódicos é periódica se e somente se a relação entre os períodos for racional, isto é,

$$x(t) = x(t + T_1)\ ,\ \ y(t) = y(t + T_2)$$

$$x(t) + y(t) = x(t + T) + y(t + T) \quad \Leftrightarrow \quad T = pT_1 = qT_2 \ \ ,\ \ p, q \in \mathbb{Z}_+$$

Exemplo

Exemplo 1.7

O sinal

$$x(t) = \text{sen}(2\pi t) + \cos(3t)$$

não é periódico, pois não existem p, q inteiros que satisfazem

$$T = p1 = q\frac{2\pi}{3}$$

Propriedade 6

Os sinais periódicos de período $T = 2\pi/\omega_0$

$$g_k(t) = \exp(jk\omega_0 t) \quad , \quad g_\ell(t) = \exp(j\ell\omega_0 t) \qquad k \neq \ell \ \textit{inteiros}$$

são ortogonais.
Além disso

$$\langle g_k(t) g_k^*(t) \rangle = \int_T g_k(t) g_k^*(t) dt = T$$

Prova: T *é o período fundamental de* $g_k(t)$, $\forall k \neq 0$ *e*

$$\langle g_k(t) g_\ell^*(t) \rangle = \int_T \exp\big(j(k-\ell)\omega_0 t\big) dt = 0 \ , \ k \neq \ell$$

pois a parte real e a parte imaginária são senóides que oscilam um número inteiro de vezes dentro do período T.

Para $k = \ell$,

$$\langle g_k(t) g_k^*(t) \rangle = \int_T dt = T$$

Definição 8 (Série exponencial de Fourier)

É a série periódica de período fundamental $T = 2\pi/\omega_0$ dada por

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{\langle x(t) g_k^*(t) \rangle}{\langle g_k(t) g_k^*(t) \rangle} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

Note que os coeficientes c_k foram obtidos por projeção ortogonal e, portanto, minimizam o erro quadrático.

Observação: Para sinais contínuos, a minimização do erro quadrático não implica que o erro é nulo, ou seja, a série não converge ponto a ponto para o sinal.

Mesmo para erro quadrático nulo (eventualmente com um número infinito de coeficientes), nas descontinuidades do sinal ocorre uma distorção (denominada fenômeno de Gibbs[1])

Se o sinal $x(t)$ for periódico de período fundamental T, a série representa o sinal para todo t.

Se o sinal $x(t)$ não for periódico, a série representa o sinal no intervalo T considerado, como ilustrado na Figura 1.

Série exponencial de Fourier III

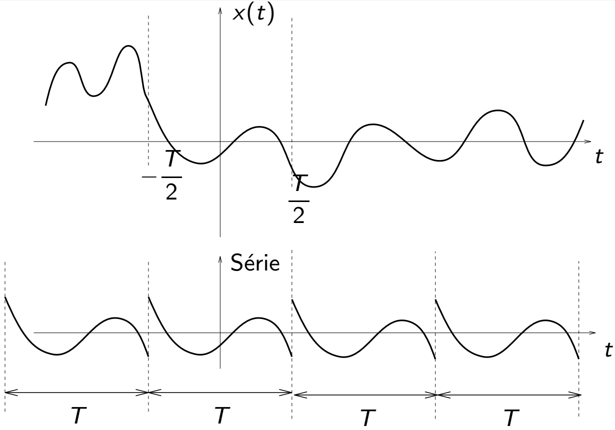


Figura: Série de Fourier do sinal $x(t)$ representado no intervalo $(-T/2, T/2)$.

[1]Willard Gibbs, matemático norte-americano (1839-1903).

Propriedade 7 (Condições suficientes para convergência da série de Fourier)

Considere o erro

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} c_k \exp(jk\omega_0 t)$$

Quando $N \to +\infty$*, a série converge quadraticamente se* $\left\langle |\varepsilon_N(t)|^2 \right\rangle \to 0$*, e converge pontualmente se* $\varepsilon_N(t) \to 0$ *para todo* t*.*

- Sinais quadraticamente integráveis (energia finita) no intervalo T, ou seja,

$$\int_T |x(t)|^2 dt < +\infty$$

possuem série de Fourier que converge quadraticamente, isto é, a energia do erro tende a zero.

Condições suficientes para convergência da série de Fourier II

A convergência não é necessariamente pontual, como por exemplo em sinais com descontinuidades. Nesse caso,

$$x_N(t_0) \to \frac{x(t_{0+}) - x(t_{0-})}{2}$$

• Uma condição alternativa à de energia finita é dada pelas condições de Dirichlet[2], que devem ser simultaneamente satisfeitas:

Condição 1: $x(t)$ é absolutamente integrável, ou seja

$$\int_T |x(t)| dt < +\infty$$

Por exemplo, o sinal periódico

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT) \quad , \quad p(t) = 1/t \ , \ t \in (0, T]$$

não é absolutamente integrável e portanto não possui série de Fourier.

Condição 2: $x(t)$ possui um número finito de máximos e mínimos no intervalo T.

Os sinais periódicos $x_1(t)$ e $x_2(t)$, de período $T = 1$, definidos a partir dos pulsos

$$p_1(t) = \text{sen}(2\pi/t) \ , \ t \in (0,1]$$

$$p_2(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } t \text{ irracional} \\ -1 \text{ para } t \text{ racional} \end{cases} , \ t \in (0,1]$$

são absolutamente integráveis, mas possuem um número infinito de máximos e mínimos no intervalo $(0,1]$ e portanto não têm série de Fourier.

Condição 3: $x(t)$ possui um número finito de descontinuidades finitas no intervalo.

Por exemplo, o sinal $x_2(t)$ tem um número infinito de descontinuidades finitas no intervalo.

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático francês (1805-1859).

Notação:

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \iff x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega_0 t) \ ,$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt \ \ , \ \ T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

A notação pressupõe que o sinal original $x(t)$ foi descrito em um intervalo T, no qual são computados os coeficientes c_k.

Por construção, a série de Fourier de $x(t)$ é periódica, de período T.

A partir deste ponto, considera-se que a convergência da série é pontual.

Escolhendo um intervalo T centrado em $t = 0$ e definindo $p(t) = x(t)G_T(t)$ tem-se

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT)$$

Propriedade 8 (Linearidade)

A série de Fourier é linear, isto é,

$$\mathscr{F}_S\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\}_T = \alpha_1 \mathscr{F}_S\{x_1(t)\}_T + \alpha_2 \mathscr{F}_S\{x_2(t)\}_T$$

Exemplo 1.8

$$2\cos(t) + 2\cos(2t) =$$

Propriedade 8 (Linearidade)

A série de Fourier é linear, isto é,

$$\mathscr{F}_S\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\}_T = \alpha_1 \mathscr{F}_S\{x_1(t)\}_T + \alpha_2 \mathscr{F}_S\{x_2(t)\}_T$$

Exemplo 1.8

$$2\cos(t) + 2\cos(2t) = \exp(jt) + \exp(-jt) + \exp(j2t) + \exp(-j2t)$$

Portanto, a série de Fourier é dada por

$$\mathscr{F}_S\{2\cos(t) + 2\cos(2t)\}_{T=2\pi} = \mathscr{F}_S\{2\cos(t)\}_{T=2\pi} + \mathscr{F}_S\{2\cos(2t)\}_{T=2\pi}$$

$$c_1 = c_{-1} = c_2 = c_{-2} = 1 \quad , \quad w_0 = 1$$

Exemplo 1.9

A soma dos sinais periódicos

$$x(t) = 2\cos(t) + 2\cos(2\pi t) = \exp(jt) + \exp(-jt) + \exp(j2\pi t) + \exp(-j2\pi t)$$

não é periódica, e portanto não existe uma série de Fourier para o sinal $x(t)$.

Note entretanto que a série de Fourier do sinal

$$y(t) = x(t)G_T(t)$$

pode ser obtida, com $T > 0$ qualquer, para descrever o sinal periódico

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(t - kT)$$

que é igual a $y(t)$ entre $-T/2$ e $T/2$.

Exemplo 1.10

Os coeficientes da série de Fourier do sinal periódico impulsivo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT)$$

$$p(t) = \delta(t + T/4) - \delta(t - T/4)$$

são dados por

Exemplo 1.10

Os coeficientes da série de Fourier do sinal periódico impulsivo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT)$$

$$p(t) = \delta(t + T/4) - \delta(t - T/4)$$

são dados por

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T p(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt = \frac{1}{T}\Big(\exp(jk\omega_0 T/4) - \exp(-jk\omega_0 T/4)\Big)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\Big(\exp(jk\pi/2) - \exp(-jk\pi/2)\Big) = \frac{1}{T}2j\text{sen}(k\pi/2)$$

Note que $p(t)$ é uma função ímpar e que os coeficientes são imaginários.

Exemplo 1.11

Os coeficientes da série de Fourier do sinal periódico impulsivo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT)$$

$$p(t) = \delta(t + T/4) + \delta(t - T/4)$$

são dados por

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T p(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt = \frac{1}{T}\Big(\exp(jk\omega_0 T/4) + \exp(-jk\omega_0 T/4)\Big)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\Big(\exp(jk\pi/2) + \exp(-jk\pi/2)\Big) = \frac{1}{T}2\cos(k\pi/2)$$

Note que $p(t)$ é uma função par e que os coeficientes são reais.

Trem de impulsos

Propriedade 9 (Trem de impulsos)

$$\mathscr{F}_S \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \right\}_T = \{\frac{1}{T}\}_{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(jk\omega_0 t)$$

pois

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \exp(-jk\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_T \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

para $k \neq 0$ *os impulsos estão fora do intervalo de integração.*

Propriedade 10 (Valor médio)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \;\; \textit{(valor médio)} \;\; , \;\; x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$$

Propriedade 11 (Complexo conjugado)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{x^*(t)\}_T = \{c^*_{-k}\}_{\omega_0}$$

pois, denominando d_k *os coeficientes da série associada a* $x^*(t)$*, tem-se*

$$d_k = \frac{1}{T}\int_T x^*(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt = \left(\frac{1}{T}\int_T x(t)\exp(jk\omega_0 t)dt\right)^* = c^*_{-k}$$

Propriedade 12

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \text{ e } x(t) \text{ é real} \quad \Rightarrow \quad c_k = c^*_{-k}$$

pois, pela Propriedade 11,

$$x^*(t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad c_k = c^*_{-k}$$

Teorema 2 (Teorema de Parseval para Série Exponencial de Fourier)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \ \ \textit{(potência média)}$$

pelo Teorema 1 e pela Propriedade 6.

Exemplo

Exemplo 1.12

Determine a série exponencial de Fourier e a potência média para

a) $\mathrm{sen}(10t)$ b) $\cos(5t)$ c) $\mathrm{sen}^2(10t)$ d) $\cos^2(5t)$

Propriedade 13 (Deslocamento no tempo)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \ , \quad a \ real \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{x(t-a)\}_T = \{c_k \exp(-jk\omega_0 a)\}_{\omega_0}$$

pois

$$x(t-a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(-jk\omega_0 a)\exp(jk\omega_0 t)$$

Propriedade 14 (Multiplicação no tempo)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)y(t)\}_T = \mathscr{F}_S\{x(t)\}_T * \mathscr{F}_S\{y(t)\}_T = \{c_k * d_k\}_{\omega_0}$$

pois, denominando e_k os coeficientes da série associada ao produto, tem-se

$$e_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt = \frac{1}{T}\int_T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\omega_0 t)y(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \underbrace{\frac{1}{T}\int_T y(t)\exp\big(-j(k-m)\omega_0 t\big)dt}_{d_{k-m}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m d_{k-m} = c_k * d_k$$

Definição 9 (Convolução periódica)

A convolução periódica de $x(t)$ *e* $y(t)$*, sinais periódicos de período* T*, é definida por*

$$x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\beta) y(t-\beta) d\beta$$

Note que a convolução periódica produz um sinal periódico.

Propriedade 15

$$\mathscr{F}_S\{x(t) \circledast y(t)\}_T = \{Tc_k d_k\}_{\omega_0}$$

sendo

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \quad , \quad \mathscr{F}_S\{y(t)\}_T = \{d_k\}_{\omega_0}$$

pois

$$\frac{1}{T}\int_T (x(t) \circledast y(t)) \exp(-jk\omega_0 t) dt = \frac{1}{T}\int_T x(\beta) \int_T y(t-\beta) \exp(-jk\omega_0 t) dt \; d\beta =$$

$$= \int_T x(\beta) \exp(-jk\omega_0 \beta) \underbrace{\frac{1}{T}\int_T y(\alpha) \exp(-jk\omega_0 \alpha) d\alpha}_{d_k} d\beta =$$

$$= Td_k \frac{1}{T}\int_T x(\beta) \exp(-jk\omega_0 \beta) = Tc_k d_k$$

Propriedade 16 (Série trigonométrica de Fourier)

Considere o sinal $x(t)$ real e periódico, de período T. Então

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \exp(jk\omega_0 t) + c_{-k} \exp(-jk\omega_0 t) \right)$$

que pode ser escrito como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k sen(k\omega_0 t) \right)$$

com

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t)dt \qquad \textit{(valor médio)}$$

$$a_k = (c_k + c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt \; ; \; b_k = j(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_T x(t) sen(k\omega_0 t)dt$$

Os coeficientes a_k e b_k são reais.

Exemplo 1.13

A série trigonométrica de Fourier para a função quadrada periódica da Figura 2 é

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{1} - \frac{\cos(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{5} - \frac{\cos(7\omega_0 t)}{7} \cdots\right) \quad ; \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

Exemplo II

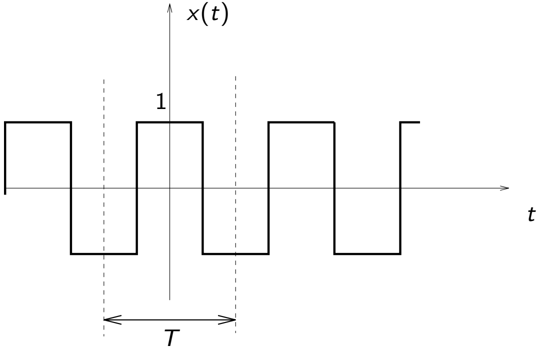


Figura: Onda quadrada de período T.

Para o cálculo dos coeficientes da série, a_0, a_k e b_k, define-se a função no intervalo $(-T/2, +T/2)$:

$$x(t) = \begin{cases} -1 & t \in (-T/2, -T/4) \\ +1 & t \in (-T/4, +T/4) \\ -1 & t \in (+T/4, +T/2) \end{cases}$$

$$a_0 = 0 \qquad \text{(valor médio nulo)} \quad ; \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{-T/4}(-1)\cos(k\omega_0 t)dt + \int_{-T/4}^{+T/4}(1)\cos(k\omega_0 t)dt + \int_{+T/4}^{+T/2}(-1)\cos(k\omega_0 t)dt\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\left((-1)\frac{1}{k\omega_0}\text{sen}(k\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{-T/4} + (1)\frac{1}{k\omega_0}\text{sen}(k\omega_0 t)\Big|_{-T/4}^{+T/4} + (-1)\frac{1}{k\omega_0}\text{sen}(k\omega_0 t)\Big|_{+T/4}^{+T/2}\right)$$

Exemplo IV

Como $\omega_0 = 2\pi/T$, portanto $k\omega_0 T/2 = k\pi$

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\Big((-1)\big(\text{sen}(-k\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(-k\pi)\big) + (1)\big(\text{sen}(k\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(-k\frac{\pi}{2})\big) + (-1)\big(\text{sen}(k\pi) - \text{sen}(k\frac{\pi}{2})\big)\Big)$$

$$a_k \;=\; \frac{4}{k\pi}\text{sen}(\frac{k\pi}{2})$$

$$\text{sen}(k\pi) = \text{sen}(-k\pi) \;=\; 0 \;\text{ e }\; \text{sen}(-k\frac{\pi}{2}) = -\text{sen}(k\frac{\pi}{2}) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\text{sen}(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} -1 & , \; k = 3, 7, 11, \ldots \\ \;\;\,0 & , \; k = 2, 4, 6, 8, \ldots \\ +1 & , \; k = 1, 5, 9, 13, \ldots \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\text{sen}(k\omega_0 t)dt = 0 \qquad \text{(pois o sinal é par)}$$

Comprovando

Exemplo V

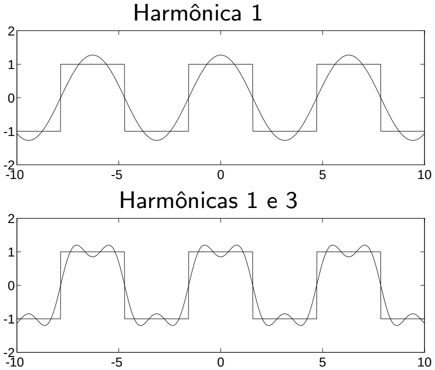
$$b_k = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{-T/4}(-1)\text{sen}(k\omega_0 t)dt + \int_{-T/4}^{+T/4}(1)\text{sen}(k\omega_0 t)dt \;+\; \int_{+T/4}^{+T/2}(-1)\text{sen}(k\omega_0 t)dt\right)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\left((+1)\frac{1}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{-T/4} + (-1)\frac{1}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t)\Big|_{-T/4}^{+T/4} + \right.$$
$$\left.(1)\frac{1}{k\omega_0}\cos(k\omega_0 t)\Big|_{+T/4}^{+T/2}\right)$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi}\Big((+1)\big(\cos(-k\frac{\pi}{2}) - \cos(-k\pi)\big) \;+\; (-1)\big(\cos(k\frac{\pi}{2}) - \cos(-k\frac{\pi}{2})\big) \;+$$
$$(1)\big(\cos(k\pi) - \cos(k\frac{\pi}{2})\big)\Big)$$

$$\cos(-k\pi) = \cos(k\pi) = \begin{cases} +1 & k \;\text{par} \\ -1 & k \;\text{ímpar} \end{cases} \Longrightarrow b_k = \frac{1}{k\pi}\Big(-\cos(k\pi) + \cos(k\pi)\Big) = 0$$

A contribuição das harmônicas da série de Fourier é ilustrada na Figura 3. Observe que a série passa pelos pontos intermediários nas discontinuidades e tem picos próximos às transições (fenômeno de Gibbs).
A convergência pontual, fora das discontinuidades, é relativamente lenta. No entanto, sistemas lineares são em geral "passa-baixas", isto é, a atenuação cresce com a freqüência, de modo que a saída pode ser bem aproximada por uma série com um número menor de componentes que os necessários para representar a entrada.


Harmônica 1
2
1
0
-1
-2
-10
-5
0
5
10
Harmônicas 1 e 3
2
1
0
-1
-2
-10
-5
0
5
10

Exemplo VIII

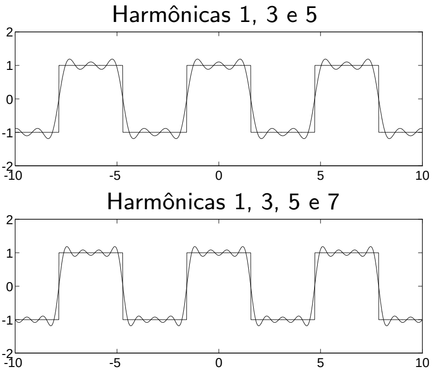


Figura: Série de Fourier para a onda quadrada.

Propriedade 17 (Derivada)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}_T = \{jk\omega_0 c_k\}_{\omega_0}$$

Prova: usando a propriedade (integração por partes)

$$\int udv = uv - \int vdu$$

tem-se que os coeficientes da série de Fourier da derivada são dados por

$$\frac{1}{T}\int_T \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\exp(-jk\omega_0 t)dt = \frac{1}{T}\int_T \exp(-jk\omega_0 t)dx(t) =$$

$$= \frac{1}{T}x(t)\exp(-jk\omega_0 t)\Big|_0^T - \frac{1}{T}\int_T x(t)(-jk\omega_0)\exp(-jk\omega_0 t)dt = jk\omega_0 c_k$$

Propriedade 18 (Integral)

$$\mathscr{F}_S\{x(t)\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} \;\; e \; c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta\right\}_T = \left\{\frac{1}{jk\omega_0}c_k\right\}_{\omega_0}$$

pois

$$\mathscr{F}_S\left\{x(t) = \frac{d}{dt}y(t)\right\}_T = \{c_k\}_{\omega_0} = \{jk\omega_0 d_k\}_{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\left\{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta\right\}_T = \{d_k\}_{\omega_0} = \left\{\frac{c_k}{jk\omega_0}\right\}_{\omega_0}$$

Observe que, se o valor médio de $x(t)$ for diferente de zero, $y(t)$ diverge e não é um sinal periódico.

Exemplo 1.14

Os coeficientes da série de Fourier da onda quadrada mostrada na Figura 2 foram calculados pela definição.

Alternativamente, a propriedade da integral pode ser utilizada para o cálculo. Note que a onda por ser descrita como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT)$$

$$p(t) = -u(t + T/2) + 2u(t + T/4) - 2u(t - T/4) + u(t - T/2)$$

Derivando $x(t)$, obtém-se um sinal periódico impulsivo, dado por

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t - kT)$$

$$q(t) = -\delta(t + T/2) + 2\delta(t + T/4) - 2\delta(t - T/4) + \delta(t - T/2)$$

Exemplo II

Os coeficentes da série de Fourier de $y(t)$ são dados por

$$d_k = \frac{1}{T}\int_T q(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt = \frac{1}{T}\Big(-\exp(jk\omega_0 T/2)$$

$$+2\exp(jk\omega_0 T/4) - 2\exp(-jk\omega_0 T/4) + \exp(-jk\omega_0 T/2)\Big)$$

$$d_k = \frac{1}{T}\Big(-\exp(jk\pi) + 2\exp(jk\pi/2) - 2\exp(-jk\pi/2) + \exp(-jk\pi)\Big) = \frac{1}{T}4j\text{sen}(k\pi/2)$$

Portanto,

$$c_k = \frac{d_k}{jk\omega_0} = \frac{2}{k\pi}\text{sen}(k\pi/2)$$