

# IA888- Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

## Observabilidade e Controlabilidade SISO

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2014

## Definição 1 (Observabilidade)

*Um sistema contínuo autônomo descrito por*

$$\dot{v}(t) = f(v(t), t) \quad , \quad y(t) = g(v(t), t)$$

*é observável em  $t_0$  se existir  $\tau > 0$  tal que o conhecimento da saída  $y(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$  é suficiente para determinar a condição  $v(t_0)$ .*

*Sistemas lineares invariantes no tempo com saída escalar, descritos por*

$$\dot{v}(t) = Av(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad y(t) = cv(t) \in \mathbb{R}$$

*são observáveis se existir  $\tau > 0$  tal que o conhecimento da saída  $y(t)$  para todo  $t \in [0, \tau]$  é suficiente para determinar a condição inicial  $v(0)$ .*

## Propriedade 1 (Matriz de observabilidade)

*O sistema linear invariante no tempo*

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

*com  $v \in \mathbb{R}^n$  é observável se e somente se o rank da matriz de observabilidade  $Obsv(A, c)$  for igual a  $n$*

$$Obsv(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

*Ou seja, o sistema é observável se e somente se  $\det(Obsv(A, c)) \neq 0$ .*

Prova:

$$y(t) = c \exp(At)v(0)$$

Derivando  $n-1$  vezes  $y(t)$  e computando em  $t=0$ , tem-se

$$\text{Obsv}(A, c)v(0) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} v(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

que tem solução em  $v(0)$  sempre que o *rank* de  $\text{Obsv}(A, c)$  for igual a  $n$ . Note que é preciso conhecer  $y(t)$  em uma vizinhança do zero para determinar os valores das derivadas em  $t=0$ .

**Propriedade 2** ( $c$  e  $A - \lambda I$  coprimos à direita)

O sistema

$$\dot{v} = Av, \quad y = cv$$

é observável ou, equivalentemente, o par  $(A, c)$  é observável, se e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times n}$$

tiver rank  $n$  (isto é, rank completo de colunas) para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Como  $\det(A - \lambda I) \neq 0$  para  $\lambda \in \mathbb{C}$  que não é autovalor de  $A$ , basta testar o rank da matriz para os  $\lambda$ 's autovalores de  $A$ .

Se a matriz acima tem rank  $n$ , diz-se que  $A - \lambda I$  e  $c$  são coprimos à direita, isto é, que não possuem nenhum fator comum à direita.

Prova: o rank completo de colunas  $\forall \lambda$  autovalor de  $A$  implica que não existe um vetor  $v \neq 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ c \end{bmatrix} v = 0$$

Se existirem  $\lambda_1$  e  $v_1 \neq 0$  tais que

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ c \end{bmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow Av_1 = \lambda_1 v_1, cv_1 = 0$$

tem-se que  $v_1$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$ . Assim,

$$A^2 v_1 = A \lambda_1 v_1 = \lambda_1^2 v_1, \quad A^{n-1} v_1 = \lambda_1^{n-1} v_1$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} c \\ \lambda_1 c \\ \lambda_1^2 c \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c \end{bmatrix} v_1 = 0$$

indicaria que  $\text{rank}(\text{Obsv}(A, c)) < n$ , ou seja, que o sistema é não observável.

### Exemplo 1.1 (Sistema não observável)

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v \quad ; \quad y = [1 \quad 1] v$$

não é observável, pois a matriz de observabilidade dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem determinante igual a zero. Note que, para uma condição inicial  $v(0) = v_0$ , tem-se

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1} v_0 = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} (v_1(0) + v_2(0))$$

$$\Rightarrow y(t) = (v_1(0) + v_2(0)) \exp(-2t)u(t)$$

e, portanto, o conhecimento de  $y(t)$  não permite determinar de maneira individualizada  $v_1(0)$  e  $v_2(0)$ .

Note ainda que os autovalores de  $A$  são  $-1$  e  $-2$ , e que embora

$$\begin{bmatrix} M_{-2} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - (-2)I \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possua *rank* 2, indicando que  $M_{-2}$  e  $c$  são coprimos, para  $\lambda = -1$  tem-se

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$M_{-1} = A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a matriz  $M_{-1}$ , que tem *rank* 1, possui um fator comum à direita com o vetor  $c$  (não são coprimos à direita), confirmando pela Propriedade 2 que o sistema não é observável.



## Exemplo 1.2 (Sistema observável)

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v \quad ; \quad y = [1 \quad 0] v$$

é observável, pois a matriz de observabilidade dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Para uma condição inicial  $v(0) = v_0$ , tem-se

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1} v_0 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} v_1(0) + \frac{1}{(s+1)(s+2)} v_2(0)$$

$$\Rightarrow y(t) = (2\exp(-t) - \exp(-2t)) v_1(0) u(t) + (\exp(-t) - \exp(-2t)) v_2(0) u(t)$$

$$y(0) = v_1(0) \quad , \quad \dot{y}(0) = v_2(0)$$

## Exemplo – Sistema observável II

Neste caso, o conhecimento de  $y(t)$  permite determinar a condição inicial.

Confirmando, pela Propriedade 2, tem-se

$$\begin{bmatrix} M_{-2} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - (-2)I \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{-1} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - (-1)I \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ambas com *rank* 2 (não há fator comum entre  $M_\lambda$  e  $c$  que possa ser colocado em evidência à direita).

## Exemplo 1.3

Considere o circuito da Figura 1 com  $\sigma > 0$  e as variáveis de estado  $v_1$  (tensão no capacitor) e  $v_2$  (corrente no indutor).

## Exemplo II

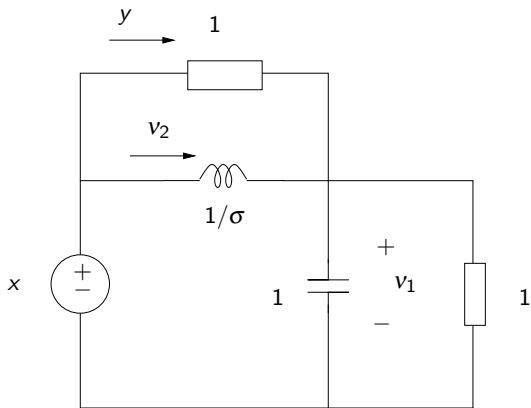


Figura : Circuito  $RLC$  com  $R = C = 1$  e  $L = 1/\sigma$ .

## Exemplo III

$$v_2 + \frac{1}{\sigma} \dot{v}_2 = \dot{v}_1 + v_1 \quad ; \quad x = \frac{1}{\sigma} \dot{v}_2 + v_1 \quad ; \quad y = \frac{1}{\sigma} \dot{v}_2$$

Colocando na forma matricial, tem-se

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \end{bmatrix} , \quad c = [-1 \quad 0] , \quad d = [1] \quad (2)$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = 1 \neq 0$$

indicando que o sistema (1)-(2) é observável independentemente de  $\sigma$ .

A equação diferencial em  $y$  é

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + 2p + \sigma \quad , \quad N(p) = p(p+1)$$

Note que para  $\sigma = 1$  (constantes de tempo das malhas indutiva e capacitiva idênticas) ocorre um cancelamento entre zero e pólo.

## Exemplo 1.4

Considere novamente o circuito descrito na Figura 1, com  $\sigma > 0$ , cuja equação diferencial em  $y$  é

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + 2p + \sigma \quad , \quad N(p) = p(p+1)$$

$$N(p) = D(p) + \bar{N}(p) \quad \Rightarrow \quad \bar{N}(p) = -p - \sigma$$

A representação em equações de estado na forma companheira (note que as variáveis de estado  $v_1$  e  $v_2$  não mais correspondem à tensão no capacitor  $v_1$  e à corrente no indutor  $v_2$ ) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} -\sigma & -1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x \quad (4)$$

A matriz de observabilidade para o sistema (3)-(4) é dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & -1 \\ \sigma & 2 - \sigma \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = \sigma(\sigma - 1)$$

Portanto, a realização (3)-(4) do sistema (variáveis  $v_1$  e  $v_2$ ) não é observável se  $\sigma = 1$ .

Note, portanto, que a observabilidade **depende da representação interna** do sistema, isto é, da escolha das variáveis de estado.



## Propriedade 3 (Observabilidade de sistemas similares)

*Transformações de similaridade não alteram a observabilidade de um sistema linear invariante no tempo.*

Prova:

Os sistemas similares, com  $T$  não singular, dados por

$$\dot{v} = Av, \quad v = T\hat{v} \Rightarrow \dot{\hat{v}} = T^{-1}\dot{v} = T^{-1}Av = T^{-1}AT\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT$$

$$y = cv = cT\hat{v} \Rightarrow \hat{c} = cT$$

têm matrizes de observabilidade que verificam

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{c}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{c}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} T \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

## Exemplo 1.5

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = [0 \quad 2]$$

O sistema é observável, pois

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 16 \neq 0$$

Escolhendo

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e escrevendo as equações em termos de  $v = T\hat{v}$ , tem-se

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = [2 \quad 0]$$

$$\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{c}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{c})) = -16 \neq 0$$

## Definição 2 (Controlabilidade)

*Um sistema contínuo descrito por*

$$\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$$

*é controlável em  $t_0$  se existir  $\tau > 0$  finito e uma entrada  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$  que leve o sistema de um estado inicial qualquer  $v(t_0)$  para um estado arbitrário  $v(t_0 + \tau)$ .*

*Sistemas lineares invariantes no tempo com entrada escalar, descritos por*

$$\dot{v}(t) = Av(t) + bx(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

*são controláveis se para qualquer estado inicial  $v(0)$  e um estado  $v(\tau)$  final arbitrário, existir uma entrada  $x(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$  que leve o sistema de  $v(0)$  a  $v(\tau)$  em tempo finito  $\tau$ .*

## Propriedade 4 (Matriz de controlabilidade)

O sistema linear invariante no tempo

$$\dot{v} = Av + bx$$

com  $v \in \mathbb{R}^n$  é controlável se e somente se o rank da matriz de controlabilidade  $\text{Ctrb}(A, b)$  for igual a  $n$

$$\text{Ctrb}(A, b) = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ou seja, o sistema é controlável se e somente se  $\det(\text{Ctrb}(A, b)) \neq 0$ .

Prova:

A solução  $v(t)$ , com condição inicial  $v(0)$  conhecida e uma entrada  $x(t)$ , é dada por

$$v(t) = \exp(At)v(0) + (\exp(At)u(t)) * bx(t)$$

## Matriz de controlabilidade II

Por Cayley-Hamilton, tem-se

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t) A^k$$

e portanto

$$v(t) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t) A^k u(t) \right) * b x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k b \sigma_k(t)$$

com

$$v(t) = v(t) - \exp(At)v(0) \quad , \quad \sigma_k(t) = (\rho_k(t)u(t)) * x(t)$$

Para  $t = \tau$ , tem-se

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0(\tau) \\ \sigma_1(\tau) \\ \vdots \\ \sigma_{n-1}(\tau) \end{bmatrix}$$

que possui solução sempre que o *rank* de  $\text{Ctrb}(A, b)$  for igual a  $n$ .

**Propriedade 5** ( $b$  e  $A - \lambda I$  coprimos à esquerda)

O sistema

$$\dot{v} = Av + bx$$

é controlável ou, equivalentemente, o par  $(A, b)$  é controlável, se e somente se a matriz

$$[A - \lambda I \quad b] \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)}$$

tiver rank  $n$  (isto é, rank completo de linhas) para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Como  $\det(A - \lambda I) \neq 0$  para  $\lambda \in \mathbb{C}$  que não é autovalor de  $A$ , basta testar o rank da matriz para os  $\lambda$ 's autovalores de  $A$ .

Se a matriz acima tem rank  $n$ , diz-se que  $A - \lambda I$  e  $b$  são coprimos à esquerda, isto é, que não possuem nenhum fator comum à esquerda.

Prova: o rank completo de linhas  $\forall \lambda$  autovalor de  $A$  implica que não existe um vetor  $q \neq 0$  tal que

$$q' [A - \lambda I \quad b] = 0$$

Se existirem  $\lambda_1$  e  $q_1 \neq 0$  tais que

$$q_1' [A - \lambda_1 I \quad b] = 0 \Rightarrow q_1' A = \lambda_1 q_1', \quad q_1' b = 0$$

tem-se que  $q_1$  é um autovetor à esquerda associado ao autovalor  $\lambda_1$ ,  
 $q_1' A^{n-1} = q_1' \lambda_1^{n-1}$  e, portanto,

$$q_1' [b \quad Ab \quad A^2 b \quad \dots \quad A^{n-1} b] = q_1' [\lambda_1 b \quad \lambda_1^2 b \quad \dots \quad \lambda_1^{n-1} b] = 0$$

indicando que o sistema é não controlável.



### Exemplo 1.6 (Sistema não controlável)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

Analisando a controlabilidade, tem-se

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) =$$

### Exemplo 1.6 (Sistema não controlável)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

Analisando a controlabilidade, tem-se

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -2b_1 - 3b_2 \end{bmatrix} = -(2b_1^2 + 3b_1b_2 + b_2^2)$$

e portanto para  $b_2 = -b_1$  ou  $b_2 = -2b_1$ , o sistema é não controlável (determinante igual a zero).

Utilizando o operador  $p$ , tem-se

$$v = (pI - A)^{-1} b x = \frac{1}{D(p)} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x, \quad D(p) = (p+1)(p+2)$$

As duas situações de não controlabilidade implicam

$$b_1 = -b_2 = \beta \Rightarrow v = \frac{\beta}{p+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x, \quad b_2 = -2b_1 = -2\beta \Rightarrow v = \frac{\beta}{p+2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x$$

Note que não é possível controlar individualmente os dois estados e que, em cada uma das situações, um dos modos próprios não aparece na equação diferencial.

Confirmando, pela Propriedade 5 tem-se

$$[A - (-1)I \quad b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ -2 & -2 & b_2 \end{bmatrix}$$

que tem *rank* 1 se  $b_2 = -2b_1$  e

$$[A - (-2)I \quad b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & b_1 \\ -2 & -1 & b_2 \end{bmatrix}$$

que tem *rank* 1 se  $b_1 = -b_2$ .

### Exemplo 1.7 (Sistema controlável)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = 0$$

O sistema é controlável, pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det [b \quad Ab] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = -6$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$V(s) = (sI - A)^{-1} b X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix} X(s)$$

Para  $X(s)$  igual a

## Exemplo – Sistema controlável II

$$X(s) = \alpha \frac{s+1}{s+4} + \beta \frac{s+2}{s-2}$$

tem-se

$$V(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s+4}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{s-2}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

e portanto

$$v(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & -\exp(-t) + 2\exp(2t) \\ -2\exp(-2t) + 3\exp(-4t) & \exp(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Note que o determinante da matriz que relaciona  $v(t)$  com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  é

$$\gamma(t) = 4 - 6\exp(-2t) - \exp(-3t) + 3\exp(-5t) \neq 0, \quad \forall t \neq 0$$

e, portanto, para qualquer  $(t = \bar{t}, v(t) = \bar{v})$  é possível encontrar  $\alpha$  e  $\beta$  que levam o sistema de  $v(0) = 0$  a  $\bar{v}$  no intervalo  $[0, \bar{t}]$ , confirmando que o sistema é controlável.

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma(\bar{t})} \begin{bmatrix} \exp(-\bar{t}) & \exp(-\bar{t}) - 2\exp(2\bar{t}) \\ 2\exp(-2\bar{t}) - 3\exp(-4\bar{t}) & \exp(-2\bar{t}) \end{bmatrix} \bar{v}$$

### Propriedade 6 (Entrada $x(t)$ que leva de 0 a $v(\tau)$ )

Para sistemas controláveis, existe  $\beta \in \mathbb{R}^n$  tal que a entrada

$$x(t) = b' \exp(-A't) \beta u(t) \quad , \quad t \in [0, \tau]$$

leva o sistema da condição inicial  $v(0) = 0$  para  $v(\tau)$  arbitrário.

## Exemplo 1.8

Considere novamente o sistema controlável do Exemplo 1.7 e a condição  $v(1)$  dados por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = 0, \quad , \quad v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = b' \exp(-A't) \beta u(t) \Rightarrow X(s) = b'(sI + A')^{-1} \beta = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} s-4 & s+2 \end{bmatrix} \beta$$

Como

$$V(s) = (sI - A)^{-1} b X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix} X(s)$$



## Exemplo II

tem-se

$$V(s) = M(s)\beta = (sI - A)^{-1}bb'(sI + A')^{-1}\beta = \frac{1}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)} \begin{bmatrix} s^2 - 16 & (s+2)(s+4) \\ (s-2)(s-4) & s^2 - 4 \end{bmatrix} \beta$$

Note que o determinante da matriz  $M(s)$  é nulo para todo  $s$ , pois  $\det(bb') = 0$ . Entretanto,  $M(t) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s)\}$  possui inversa para todo  $t > 0$  (sistema controlável), e é dada por

$$M(t) = \begin{pmatrix} 2.5\exp(t) - \exp(2t) - 2.5\exp(-t) + \exp(-2t) & \\ -0.5\exp(t) + 2.5\exp(-t) - 2\exp(-2t) & \\ & -2.5\exp(t) + 2\exp(2t) + 0.5\exp(-t) \\ & & \sinh(t) \end{pmatrix}$$

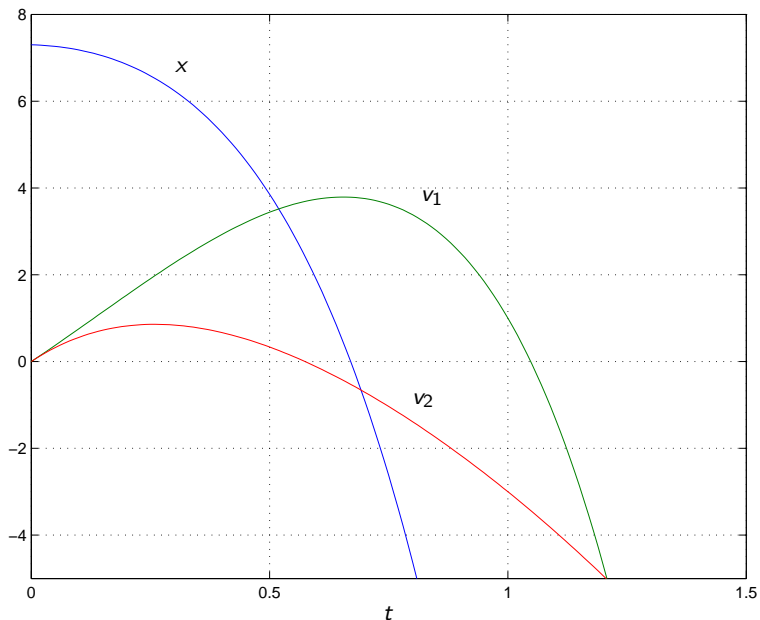
Em  $t = 1$ , tem-se

$$M(1) \approx \begin{bmatrix} -1.38 & 8.17 \\ -0.710 & 1.18 \end{bmatrix}, \quad M(1)\beta = v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta \approx \begin{bmatrix} 6.14 \\ 1.16 \end{bmatrix}$$

A Figura 2 mostra a simulação numérica do sistema para a entrada

$$x(t) = b' \exp(-A't)\beta \approx [3\exp(t) - 2\exp(2t) \quad 4\exp(2t) - 3\exp(t)] \begin{bmatrix} 6.14 \\ 1.16 \end{bmatrix}$$

## Exemplo IV



## Propriedade 7 (Controlabilidade de sistemas similares)

*Transformações de similaridade não alteram a controlabilidade de um sistema linear invariante no tempo.*

Prova:

Os sistemas similares, com  $T$  não singular, dados por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = T^{-1}\dot{v} = T^{-1}Av + T^{-1}bx = T^{-1}AT\hat{v} + T^{-1}bx$$

$$\Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{b} = T^{-1}b$$

têm matrizes de controlabilidade que verificam

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{b} & \hat{A}\hat{b} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{b} \end{bmatrix} &= \text{rank} \left( T^{-1} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \right) = \\ & \text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Exemplo 1.9

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O sistema é controlável, pois

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Ctrb}(A, b)) = 16 \neq 0$$

Escolhendo

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e escrevendo as equações em termos de  $v = T\hat{v}$ , tem-se

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})) = -16 \neq 0$$

## Propriedade 8 (Dualidade)

*O sistema  $(A, b, c, d)$  é controlável se e somente se o sistema dual  $(A', c', b', d)$  é observável, e vice-versa, isto é, o sistema  $(A, b, c, d)$  é observável se e somente se o sistema dual  $(A', c', b', d)$  é controlável.*

*Prova:*

$$\text{Ctrb}(A, b) = (\text{Obsv}(A', b'))' \quad , \quad \text{Obsv}(A, c) = (\text{Ctrb}(A', c'))'$$

## Exemplo 1.10

Considere novamente o circuito da Figura 1, com  $\sigma > 0$ , descrito pela equação diferencial

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + 2p + \sigma \quad , \quad N(p) = p(p+1)$$

com a representação de estado do Exemplo 1.4

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [-\sigma \quad -1] v + [1] x$$

que não é observável para  $\sigma = 1$ . No entanto, o sistema é controlável independentemente de  $\sigma$ , pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det [b \quad Ab] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

Por outro lado, a representação em equações de estado na forma dual, dada por



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\sigma \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 1], \quad d = [1]$$

é observável independentemente de  $\sigma$  e não é controlável para  $\sigma = 1$ , pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det [b \quad Ab] = \det \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ -1 & 2 - \sigma \end{bmatrix} = \sigma(\sigma - 1)$$

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = \det \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

## Propriedade 9 (Forma canônica controlável)

A representação

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

é denominada de forma canônica controlável, pois  $\det(\text{Ctrb}(A, b)) \neq 0$  para quaisquer valores de  $\alpha_k$ .

Prova: para  $n = 4$ , tem-se

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 + \alpha_3^2 \\ 1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 + \alpha_3^2 & -\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_3^2) \end{bmatrix}$$

cujo determinante é igual a 1. Para  $n$  qualquer, o determinante é 1 ou  $-1$ , pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = (-1)^{f[n]} \quad , \quad f[n] = \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{(n+3)n}{2}$$

Pode-se mostrar que inversa da matriz de controlabilidade é dada por

$$(\text{Ctrb}(A, b))^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 1.11

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

está na forma canônica controlável, sendo

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Ctrb}(A, b)) = -1$$

## Propriedade 10 (Forma canônica observável)

A representação de um sistema na forma

$$\dot{v} = Av, \quad y = cv, \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v, \quad y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] v$$

é denominada de forma canônica observável, pois  $\det(\text{Obsv}(A, c)) \neq 0$  para quaisquer valores de  $\alpha_k$ .

Por dualidade, essa propriedade é consequência da Propriedade 8.

## Propriedade 11

A realização mostrada na Figura 3 é a forma canônica controlável dada por ( $m = 3, \alpha_m = 1$ )

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [\bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1 \quad \bar{\beta}_2], \quad d = [\beta_3]$$

associada aos polinômios

$$D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k, \quad N(p) = \beta_3 D(p) + \bar{N}(p), \quad \bar{N}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k$$

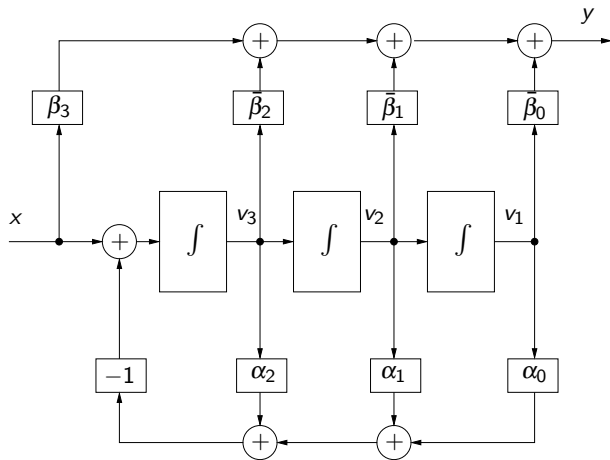


Figura : Realização na forma canônica controlável.

Por construção, a realização possui  $(A, b)$  controlável. Se  $(A, c)$  for observável, então não há cancelamentos entre pólos e zeros.

Por outro lado, se não houver cancelamento entre as raízes de  $N(p)$  e  $D(p)$  (isto é, entre pólos e zeros), a realização é observável. Portanto, essa realização é sempre controlável e a observabilidade depende dos parâmetros  $\alpha_k, \beta_k$ .

Note que cancelamentos entre pólos e zeros também implicam em cancelamentos entre  $\tilde{N}(p)$  e  $D(p)$ .



## Exemplo 1.12

Considere a realização mostrada na Figura 3 com

$$\beta_3 = 0, \beta_2 = 1, \beta_1 = 3, \beta_0 = 2, \quad \alpha_2 = 8, \alpha_1 = 21, \alpha_0 = 18$$

implicando em

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -21 & -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [2 \quad 3 \quad 1], \quad d = [0]$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -18 & -19 & -5 \\ 90 & 87 & 21 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 0$$

De fato, os polinômios

$$N(p) = p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2), \quad D(p) = p^3 + 8p^2 + 21p + 18 = (p+3)^2(p+2)$$

possuem a raiz  $-2$  em comum.

## Propriedade 12

A realização mostrada na Figura 4 é a forma canônica observável dada por ( $m = 3, \alpha_m = 1$ )

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 0 \quad 1], \quad d = [\beta_3]$$

associada aos polinômios

$$D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k \quad , \quad N(p) = \beta_3 D(p) + \bar{N}(p) \quad , \quad \bar{N}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k$$

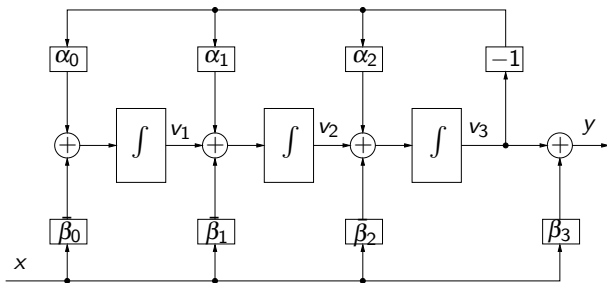


Figura : Realização na forma canônica observável.

Por construção, a realização possui  $(A, c)$  observável. Se  $(A, b)$  for controlável, então não há cancelamentos entre pólos e zeros.

Por outro lado, se não houver cancelamento entre as raízes de  $N(p)$  e  $D(p)$  (isto é, entre pólos e zeros), a realização é controlável. Portanto, essa realização é sempre observável e a controlabilidade depende dos parâmetros  $\alpha_k, \beta_k$ .

## Exemplo 1.13

Considere a realização mostrada na Figura 4 com

$$\beta_3 = 1, \bar{\beta}_2 = 1, \bar{\beta}_1 = 3, \bar{\beta}_0 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_1 = -1, \alpha_0 = -3$$

implicando em

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [0 \ 0 \ 1], d = [1]$$

A matriz de controlabilidade é dada por

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \det(\text{Ctrb}(A, b)) = 0$$

De fato, os polinômios

$$\bar{N}(p) = p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2) \quad , \quad D(p) = p^3 + 3p^2 - p - 3 = (p-1)(p+1)(p+3)$$

possuem a raiz  $-1$  em comum.

## Propriedade 13 (Decomposição canônica (modos não controláveis))

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

e a transformação de similaridade  $\bar{v} = Pv$ , com  $P$  não singular, que produz

$$\dot{\bar{v}} = P\dot{v} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\bar{A}} \bar{v} + \underbrace{Pb}_{\bar{b}} x \quad , \quad y = \underbrace{cP^{-1}}_{\bar{c}} \bar{v} + \underbrace{d}_{\bar{d}} x$$

Se a matriz de controlabilidade do sistema

$$\text{Ctrb}(A, b) = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

tem  $\text{rank } r < n$ , então

$$P^{-1} = [q_1 \quad \dots \quad q_r \quad \dots \quad q_n]$$

## Decomposição canônica (modos não controláveis) II

construída com  $r$  colunas linearmente independentes de  $\text{Ctrb}(A, b)$  (e demais colunas arbitrárias, para garantir a existência de  $P^{-1}$ ) leva o sistema para

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [\bar{c}_c \quad \bar{c}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

O subsistema de ordem  $r$

$$\dot{\bar{v}}_c = \bar{A}_c \bar{v}_c + \bar{b}_c x$$

$$y = \bar{c}_c \bar{v}_c + \bar{d}x$$

é controlável e produz a mesma função de transferência que o sistema original.

Os estados associados aos modos controláveis estão no vetor  $\bar{v}_c \in \mathbb{R}^r$ .

A decomposição canônica que separa os modos controláveis dos não controláveis é produzida pelo comando `ctrbf` do Matlab.



## Propriedade 14 (Decomposição canônica (modos não observáveis))

É o caso dual da Propriedade 13. Se

$$\text{rank}(\text{Obsv}(A, c)) = r < n$$

a transformação de similaridade  $\bar{v} = Pv$ , com  $P$  não singular dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \vdots & p_r & \vdots & p_n \end{bmatrix}'$$

construída com  $r$  linhas linearmente independentes de  $\text{Obsv}(A, c)$  (e demais linhas arbitrárias, para garantir a existência de  $P^{-1}$ ) leva o sistema (com estados associados aos modos observáveis no vetor  $\bar{v}_o \in \mathbb{R}^r$ ) para

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

O subsistema de ordem  $r$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{v}}_o &= \bar{A}_o \bar{v}_o + \bar{b}_o x \\ y &= \bar{c}_o \bar{v}_o + \bar{d} x\end{aligned}$$

é observável e produz a mesma função de transferência que o sistema original.

A decomposição canônica que separa os modos observáveis dos não observáveis é produzida pelo comando `obsvtf` do Matlab.

### Exemplo 1.14 (Modos não observáveis)

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = [2 \quad -1] \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é não observável, pois

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 0$$

O *rank* de  $\text{Obsv}(A, c)$  é igual a 1. Para

### Exemplo 1.14 (Modos não observáveis)

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = [2 \quad -1] \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é não observável, pois

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 0$$

O *rank* de  $\text{Obsv}(A, c)$  é igual a 1. Para

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{c} = [1 \quad 0] \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

## Exemplo – Modos não observáveis II

$$\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{c}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{c})) = 0$$

Embora a matriz  $A$  tenha dois modos próprios  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ , apenas um dos modos aparece na função de transferência

$$\frac{1}{s+3}$$

## Exemplo 1.15 (Modos não controláveis)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \quad 1 \quad 1] v$$

cujo polinômio característico é

$$\Delta(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p+1)(p+2)(p+3)$$

O sistema não é controlável, pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det [b \quad Ab \quad A^2b] = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 9 & -27 \\ 9 & -27 & 81 \end{bmatrix} = 0, \\ \text{rank}(\text{Ctrb}(A, b)) = 1$$

## Exemplo – Modos não controláveis II

Utilizando o operador  $p$ , tem-se

$$v = (pI - A)^{-1}bx = \frac{1}{p+3} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} x$$

Note que não é possível controlar individualmente os estados e que dois modos próprios não aparecem na equação diferencial.

Definindo a transformação

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -20 & -6 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = [7 \quad 1 \quad 1]$$

## Exemplo – Modos não controláveis III

Note que, no sistema transformado, foram separadas as parcelas controlável ( $\hat{v}_1$ , autovalor  $-3$ ) e não controlável ( $\hat{v}_2$  e  $\hat{v}_3$ , autovalores  $-1$  e  $-2$ ). Note também que os estados não controláveis formam um sistema autônomo independente, e a variável  $\hat{v}_2$  influencia na equação de  $\hat{v}_1$ .

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})) = 1$$

e a função de transferência é

$$\frac{7}{s+3}$$



## Exemplo 1.16

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] v$$

Os autovalores da matriz do sistema são  $-1$ ,  $-2$ ,  $3$  e  $4$  (matriz bloco triangular). Note que o sistema está na forma da decomposição canônica controlável, com os estados controláveis  $v_1$  e  $v_2$  (associados aos autovalores  $-1$  e  $-2$ ) e os não controláveis  $v_3$  e  $v_4$ . Os modos não controláveis são  $3$  e  $4$ , autovalores da submatriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade (*rank 2*) é dada por

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e a de observabilidade, de *rank* igual a 4, por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -49 & 27 \\ 10 & 11 & -323 & 147 \\ -22 & -23 & -1765 & 693 \end{bmatrix}$$

indicando que o sistema é observável. A função de transferência, que depende apenas da parte controlável e observável, é

$$\frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

### Propriedade 15 (Controlabilidade e Forma de Jordan)

*Um sistema linear invariante no tempo com uma única entrada  $(A, b)$  é controlável se e somente se sua forma de Jordan possuir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e todo elemento de  $b$  correspondente à última linha de cada bloco de Jordan for diferente de 0.*

## Exemplo 1.17

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

cuja matriz de controlabilidade é dada por

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b_1 & \sigma b_1 \\ b_2 & \sigma b_2 \end{bmatrix}$$

O sistema possui dois blocos de Jordan de tamanho 1 associados ao autovalor  $\sigma$ . Note que o sistema é não controlável para quaisquer  $b_1$ ,  $b_2$  e  $\sigma$ . Por outro lado, o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

é tal que

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b_1 & \sigma b_1 + b_2 \\ b_2 & \sigma b_2 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Ctrb}(A, b)) = -b_2^2$$

indicando que o sistema é controlável se e somente se  $b_2 \neq 0$ .

## Propriedade 16 (Observabilidade e Forma de Jordan)

*Um sistema linear invariante no tempo com uma única saída  $(A, c)$  é observável se e somente se sua forma de Jordan possuir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e todo elemento de  $c$  correspondente à primeira coluna de cada bloco de Jordan for diferente de 0.*

## Exemplo 1.18

Retomando o Exemplo 1.17, com a matriz de saída  $c = [c_1 \quad c_2]$ , tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \sigma c_1 & \sigma c_2 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 0$$

indicando que o sistema não é observável. Por outro lado,

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \sigma c_1 & c_1 + \sigma c_2 \end{bmatrix}, \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = c_1^2$$

é observável se e somente se  $c_1 \neq 0$ .