

# IA888- Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

## Variáveis de Estado

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2014

## Definição 1 (Estado)

O **estado** de um sistema dinâmico é o conjunto mínimo de valores de variáveis (chamadas **variáveis de estado**) tal que o conhecimento destas variáveis em  $t = t_0$ , conjuntamente com as entradas em  $t \geq t_0$ , determinam totalmente o comportamento do sistema (todas as variáveis do sistema) para qualquer tempo  $t \geq t_0$ . Portanto, o estado de um sistema dinâmico em um instante  $t$  qualquer fica determinado univocamente pelo estado no tempo  $t_0$  (condições iniciais) e as entradas para  $t \geq t_0$ , e é independente do estado e das entradas antes de  $t_0$ .

- O estado do sistema pode ser representado de diversas formas. Ou seja, não existe apenas uma escolha para as variáveis de estado (infinitas possibilidades).

Sistemas dinâmicos podem ser descritos por **relações de entrada-saída** ou **por variáveis internas** denominadas variáveis de estado.

## Definição 2 (Representação canônica por variáveis de estado)

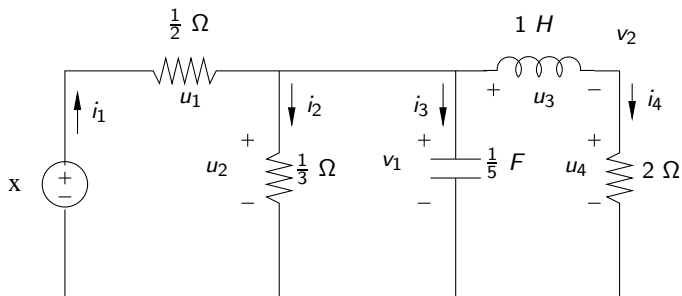
*Sistemas contínuos no tempo com uma entrada escalar  $x(t)$  e uma saída escalar  $y(t)$  são chamados de sistemas SISO (single-input single-output). Podem ser descritos por sistemas de equações de primeira ordem nas variáveis de estado. Assim,*

$$\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t) \quad , \quad y(t) = g(v(t), x(t), t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

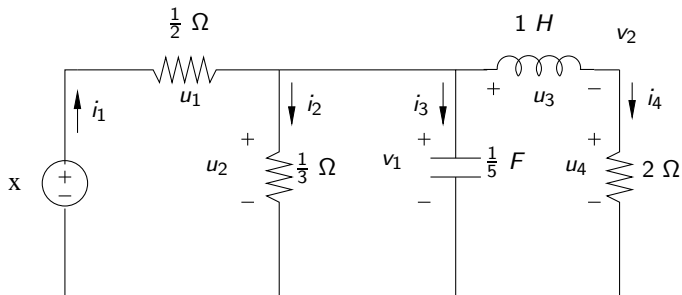
sendo  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de variáveis de estado.

Vantagens:

- Sistemas MIMO.
- Generalidade: sistemas não lineares, variantes no tempo, sistemas com atraso, sistemas com incertezas.
- Ferramentas de simulação e otimização.



- Determine a representação de estados com  $v_1$  sendo a tensão no capacitor e  $v_2$  a corrente no indutor.



- Determine a representação de estados com  $v_1$  sendo a tensão no capacitor e  $v_2$  a corrente no indutor.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

## Exemplo 1.1 (Lorenz)

Em 1963, Lorenz publicou o artigo "*Deterministic nonperiodic flow*", no *Journal of the Atmospheric Sciences*, mostrando que equações simples podem apresentar comportamentos imprevisíveis, denominados posteriormente de caóticos.

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \sigma(v_2 - v_1) \\ \dot{v}_2 &= \rho v_1 - v_2 - v_1 v_3 \\ \dot{v}_3 &= v_1 v_2 - \beta v_3\end{aligned}$$

As equações representam comportamentos atmosféricos, sendo  $v_1$  ligado à velocidade das correntes de ar e  $v_2$ ,  $v_3$  associados às temperaturas. As constantes positivas são o número de Rayleigh<sup>a</sup>  $\rho$ , o número de Prandtl<sup>b</sup>  $\sigma$  e uma razão  $\beta$ .

---

<sup>a</sup>John William Strutt, Lord Rayleigh, físico inglês (1842–1919).

<sup>b</sup>Ludwig Prandtl, engenheiro mecânico alemão (1875–1953).

## Definição 3 (Pontos de equilíbrio)

Os vetores  $\bar{v}$  solução do sistema de equações invariante no tempo

$$f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$$

para  $x(t) = \bar{x}$  constante são denominados pontos de equilíbrio.

Sistemas lineares invariantes no tempo podem ser representados por equações matriciais em termos das variáveis de estado, das entradas e saídas

$$\dot{v} = Av + Bx \quad (2)$$

$$y = Cv + Dx \quad (3)$$

sendo  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de variáveis de estado,  $x(t)$  o vetor de entradas e  $y(t)$  o vetor de saídas. A equação (2) é chamada de equação dinâmica, sendo  $A$  a matriz dinâmica do sistema e  $B$  a matriz de entradas, e a equação (3) é chamada de equação de saída, sendo  $C$  a matriz de saídas e  $D$  a matriz de transmissão direta.

## Definição 4 (Sistema linearizado)

Uma aproximação de primeira ordem pode representar o sistema em torno do ponto de equilíbrio. Assim, utilizando o jacobiano<sup>a</sup> tem-se

$$A = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad B = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$$
$$C = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad D = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$$

Neste texto, apenas entradas e saídas escalares (sistemas SISO) são consideradas, implicando que  $B = b$  (vetor coluna),  $C = c$  (vetor linha) e  $D = d$  (escalar).

---

<sup>a</sup>Karl Gustav Jacob Jacobi, prussiano do século XIX.



### Exemplo 1.2 (Lotka-Volterra)

O modelo de Lotka-Volterra<sup>a</sup> descreve, de maneira simplificada, a relação entre quantidade de predadores  $v_1$  e de presas  $v_2$  num hábitat com disponibilidade infinita de alimento para as presas.

$$\dot{v}_1 = f_1(v_1, v_2) = -av_1 + bv_1v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = f_2(v_1, v_2) = cv_2 - dv_1v_2$$

---

<sup>a</sup>Alfred James Lotka, austríaco e Vito Volterra, italiano, ambos do final do século XIX.

Os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são positivos e representam:  $a$  é a taxa de morte do predador, por fome e envelhecimento;  $b$  é o fator de ganho (para os predadores) quando do encontro com a presa;  $c$  é a taxa de expansão da população de presas (livres dos predadores);  $d$  é o fator de perda (para as presas) quando do encontro com o predador.

Os pontos de equilíbrio são

### Exemplo 1.2 (Lotka-Volterra)

O modelo de Lotka-Volterra<sup>a</sup> descreve, de maneira simplificada, a relação entre quantidade de predadores  $v_1$  e de presas  $v_2$  num hábitat com disponibilidade infinita de alimento para as presas.

$$\dot{v}_1 = f_1(v_1, v_2) = -av_1 + bv_1v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = f_2(v_1, v_2) = cv_2 - dv_1v_2$$

---

<sup>a</sup>Alfred James Lotka, austríaco e Vito Volterra, italiano, ambos do final do século XIX.

Os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são positivos e representam:  $a$  é a taxa de morte do predador, por fome e envelhecimento;  $b$  é o fator de ganho (para os predadores) quando do encontro com a presa;  $c$  é a taxa de expansão da população de presas (livres dos predadores);  $d$  é o fator de perda (para as presas) quando do encontro com o predador.

Os pontos de equilíbrio são  $(0,0)$  (desaparecimento das populações) e  $(c/d, a/b)$ .

## Exemplo – Lotka-Volterra

O jacobiano do sistema é dado por

## Exemplo – Lotka-Volterra

O jacobiano do sistema é dado por

$$\left[ \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} -a + bv_2 & bv_1 \\ -dv_2 & c - dv_1 \end{bmatrix}$$

No ponto de equilíbrio  $(0,0)$ , tem-se a representação linearizada do sistema

## Exemplo – Lotka-Volterra

O jacobiano do sistema é dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + bv_2 & bv_1 \\ -dv_2 & c - dv_1 \end{bmatrix}$$

No ponto de equilíbrio  $(0,0)$ , tem-se a representação linearizada do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

que corresponde a dois sistemas de primeira ordem desacoplados, um que cresce exponencialmente com  $c$  (presa) e outro que decresce exponencialmente com  $a$  (predador).

No ponto de equilíbrio  $(c/d, a/b)$ , tem-se a representação linearizada do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bc/d \\ -ad/b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

na qual as variáveis representam os desvios em relação ao ponto de equilíbrio.

Escrevendo a equação de segunda ordem em  $v_1$  (predador), tem-se

$$\ddot{v}_1 + acv_1 = 0$$

que produz soluções puramente oscilatórias com frequência  $\sqrt{ac}$  (em radianos), indicando que o número de predadores em torno de  $c/d$  alterna-se periodicamente com período  $T = 2\pi/\sqrt{ac}$ .

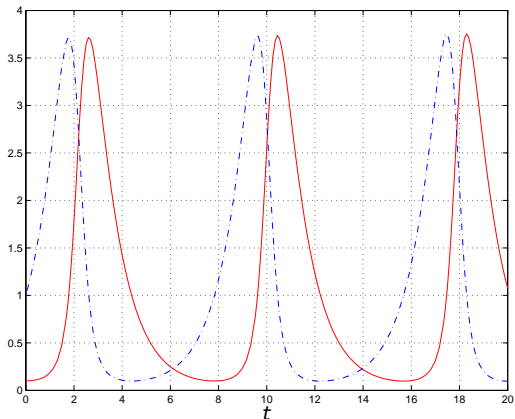
A mesma equação diferencial é obtida na variável  $v_2$  (presa), indicando que o número de presas alterna-se periodicamente em torno de  $a/b$ .

As Figuras 1 e 2 mostram a evolução do sistema não-linear ( $a = b = c = d = 1$ ) para as condições iniciais  $(0.1, 1)$  (Figura 1),  $(0.9, 1.1)$  (Figura 2, esquerda) e  $(0.1, 0.1)$  (Figura 2, direita). As trajetórias foram obtidas por simulação numérica, algoritmo de Runge-Kutta.<sup>1</sup> Note que o período das oscilações é aproximadamente igual a 8 na Figura 1 e 7 na Figura 2 (esquerda), enquanto que o período do sistema linearizado é  $2\pi$ . O menor desvio no segundo caso decorre da proximidade da condição inicial com o ponto de linearização.

---

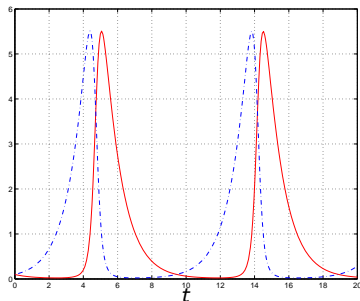
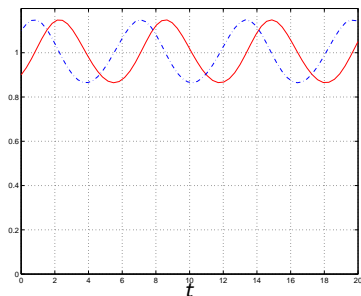
<sup>1</sup>Carle David Tolmé Runge (1856-1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), matemáticos alemães.

## Exemplo – Lotka-Volterra



**Figura:** Predadores (curva contínua) e presas (traço-e-ponto) para condição inicial  $(0.1, 1)$ .

## Exemplo – Lotka-Volterra



**Figura:** Predadores (curva contínua) e presas (traço-e-ponto) para condição inicial  $(0.9, 1.1)$  (esquerda) e  $(0.1, 0.1)$  (direita).



## Definição 5 (Espaço de fases)

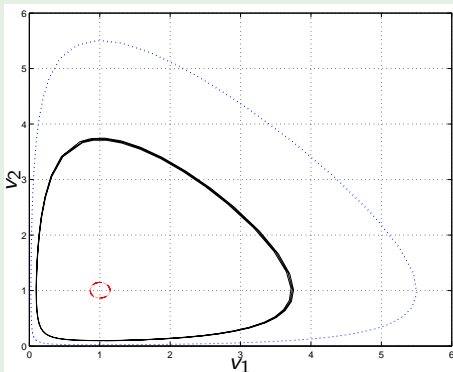
*É a representação espacial das trajetórias de um sistema dinâmico em coordenadas de variáveis de estado, tendo como variável implícita o tempo, chamada de plano de fase quando apenas duas das variáveis são representadas.*

## Propriedade 1 (Plano de fase)

*Não há cruzamento de trajetórias no espaço de fases, pois o sistema não pode evoluir diferentemente a partir de um mesmo ponto.*

## Exemplo 1.3

Os planos de fase do Exemplo 1.2 (Lotka-Volterra) são mostrados na Figura 3.



**Figura:** Planos de fase para as condições iniciais  $(0.1, 0.1)$  (curva pontilhada),  $(0.9, 1.1)$  (tracejada) e  $(0.1, 1)$  (contínua) do modelo de Lotka-Volterra ( $a = b = c = d = 1$ ).

## Exemplo 1.4 (Circuito RC)

Considere o circuito RC descrito na Figura 4 com  $\tau = RC$ .

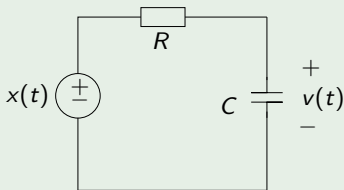


Figura: Circuito RC.

Considerando como saída a tensão  $y(t)$  no resistor, têm-se as equações de estado e de saída

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v + \frac{1}{\tau}x, \quad y = -v + x$$

## Exemplo 1.5 (Circuito $RLC$ )

As equações de estado do circuito da Figura 5 são

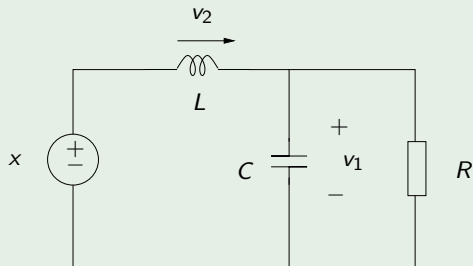


Figura: Circuito  $RLC$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

A equação diferencial em  $y$  (corrente no resistor) é dada por

$$\left( p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} \right) y = \frac{1}{RLC} x$$

## Exemplo 1.6 (Circuito de terceira ordem)

As equações de estado do circuito da Figura 6 são

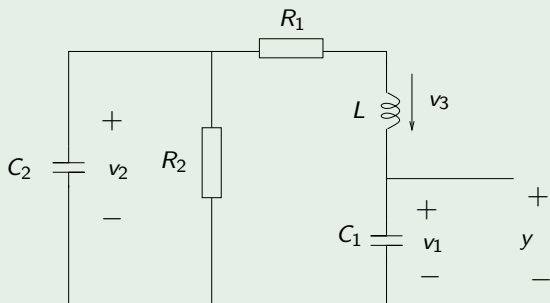


Figura: Circuito de terceira ordem.

## Exemplo – Circuito de terceira ordem II

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} v(t) \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$
$$y = [ 1 \quad 0 \quad 0 ] v$$

Esse circuito é usado para simular surtos de alta tensão (raios) em laboratório. O capacitor  $C_2$ , inicialmente carregado, transfere a energia para o capacitor  $C_1$  gerando um pulso cujo tempo de subida é da ordem de  $1\mu s$  e que cai a 50% de seu valor em cerca de  $50\mu s$ . Valores típicos:  $C_2 = 0.6\mu F$ ,  $C_1 = 0.001\mu F$ ,  $R_1 = 350\Omega$ ,  $R_2 = 115\Omega$  e  $L = 200\mu H$  (indutância parasita).

A equação diferencial homogênea de terceira ordem em  $y$  é

$$\left( p^3 + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p^2 + \left[ \frac{1}{L C_1} + \frac{1}{L C_2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] p + \frac{1}{L C_1 R_2 C_2} \right) y = 0$$

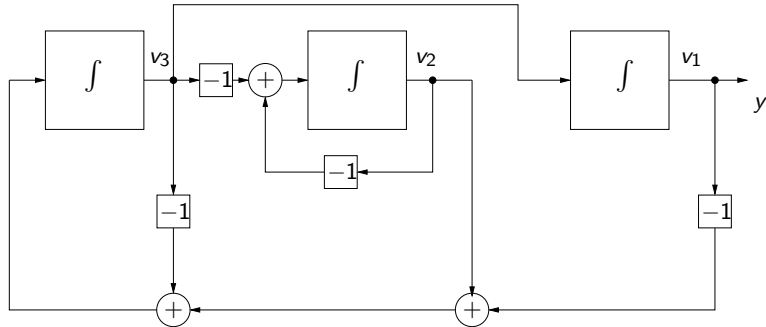
Supondo todos os parâmetros iguais a 1, tem-se

$$\dot{v}_1 = v_3, \quad \dot{v}_2 = -v_2 - v_3, \quad \dot{v}_3 = -v_1 + v_2 - v_3, \quad y = v_1$$

cuja implementação usando integradores é mostrada na Figura 7.



## Exemplo – Circuito de terceira ordem IV



**Figura:** Implementação com integradores do circuito do Exemplo 1.5 (circuito de terceira ordem).

Muitos sistemas dinâmicos são descritos por equações diferenciais que não estão na forma de variáveis de estado. Neste caso, é preciso definir variáveis de estado internas de maneira conveniente.

### Exemplo 1.7 (Pêndulo simples)

O pêndulo simples de comprimento  $\ell$ , oscilando em um plano vertical, sujeito ao atrito de fricção no engate e sustentando na extremidade livre uma massa  $m$  é descrito pela equação

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\text{sen}(\theta) - mb\dot{\theta}$$

sendo  $\theta$  o ângulo com a vertical,  $g$  a aceleração da gravidade e  $b$  o coeficiente de atrito.

Definindo-se

$$v_1 = \theta \quad , \quad v_2 = \dot{\theta}$$

tem-se

$$\dot{v}_1 = v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = -\frac{g}{\ell}\text{sen}(v_1) - \frac{b}{\ell}v_2$$

Os pontos de equilíbrio são  $(0,0)$  e  $(\pi,0)$ .

## Exemplo – Pêndulo simples II

O jacobiano é dado por

$$\left[ \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/\ell)\cos(v_1) & -b/\ell \end{bmatrix}$$

Linearizando o sistema em torno de  $(0,0)$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -b/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{\ell}\lambda + \frac{g}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2\ell} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{\ell}\right)^2 - \frac{4g}{\ell}}$$

implicando que as raízes da equação têm parte real negativa (sistema estável). Note que para  $b < 2\sqrt{g\ell}$ , as raízes são complexas conjugadas (oscilação). Além disso, se  $b = 0$ , a frequência angular da oscilação é  $\sqrt{g/\ell}$ .

Linearizando o sistema em torno de  $(\pi,0)$ , tem-se

## Exemplo – Pêndulo simples III

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & -b/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{\ell}\lambda - \frac{g}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2\ell} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{\ell}\right)^2 + \frac{4g}{\ell}}$$

implicando que uma raiz da equação tem parte real positiva (sistema instável).

A Figura 8 mostra o plano de fase do modelo não linear (contínuo) e do modelo linearizado (tracejado) em torno do ponto  $(0,0)$ , para condição inicial  $(\pi/3, 0)$ . Note que o não linear tem atenuação maior do que o linear.

## Exemplo – Pêndulo simples IV

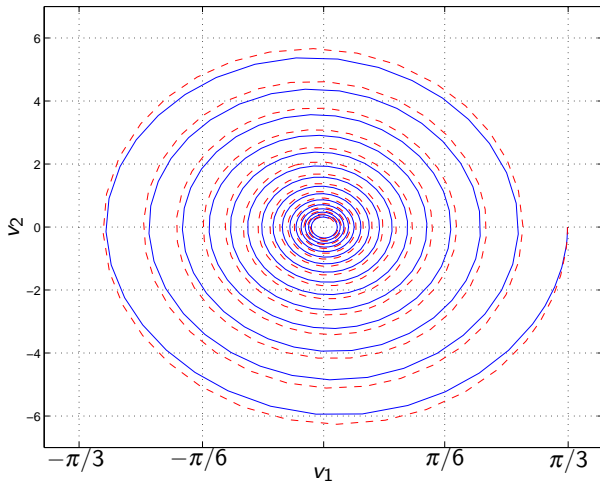


Figura: Planos de fase do pêndulo para a condição inicial  $(\pi/3, 0)$ .

## Exemplo 1.8

Considere a equação diferencial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x$$

Usando diferenciadores, pode-se implementar a equação como mostrado na Figura 9. Note que na entrada do diferenciador da esquerda, tem-se

$$y = x - 2\dot{y} - \ddot{y}$$

De maneira similar, a Figura 10 mostra uma implementação com integradores. Na entrada do integrador da esquerda, tem-se

$$\ddot{y} = x - 2\dot{y} - y$$

## Exemplo II

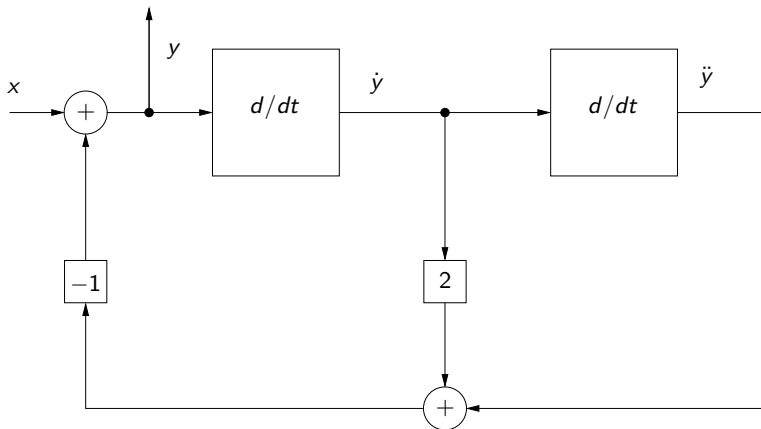


Figura: Implementação com diferenciadores de  $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x$ .

## Exemplo III

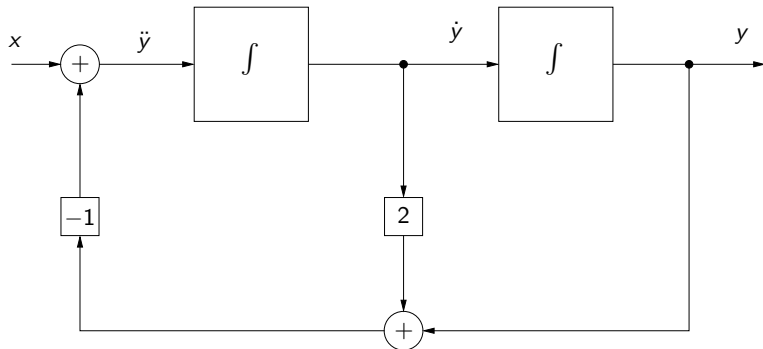


Figura: Implementação com integradores de  $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x$ .



## Exemplo IV

Apesar de ambas as implementações representarem a mesma equação diferencial (mesma função de transferência), é preferível usar integradores pois diferenciadores amplificam ruídos de alta frequência.

A relação sinal-ruído é definida como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 20 \log |a/b|$$

sendo  $a$  a amplitude do sinal e  $b$  a amplitude do ruído.

Supondo um sinal  $x(t)$  sujeito ao ruído aditivo de alta frequência  $\eta(t)$ , ambos senoidais, aplicados na entrada de um diferenciador, tem-se

$$x(t) + \eta(t) = \text{sen}(\omega_0 t) + \text{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \omega \cos(\omega t)$$

cujas relações sinal-ruído são

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = 0 \text{ dB} \quad ; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 20 \log \omega_0 / \omega$$

implicando que a relação sinal-ruído da saída diminui com o aumento da frequência do ruído.

Por outro lado, na saída do integrador tem-se

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 20 \log \omega / \omega_0$$

e portanto a relação sinal-ruído aumenta com a frequência.

# Representação em variáveis de estado a partir da equação diferencial I

Algumas representações em variáveis de estado, ditas canônicas, podem ser obtidas por inspeção direta da equação diferencial.

**Propriedade 2** (Caso  $N(p) = \beta_0$  (sem a derivada da entrada))

Considere a equação diferencial

$$D(p)y(t) = \beta_0 x(t) \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k$$

com  $\alpha_m = 1$ ,  $\alpha_k$  e  $\beta_0$  coeficientes constantes. Definindo as variáveis de estado  $v \in \mathbb{R}^m$

$$v_1 = y \quad , \quad v_2 = \dot{y} \quad , \quad \dots \quad , \quad v_m = y^{(m-1)}$$

tem-se

$$\dot{v}_m = y^{(m)} = - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k v_{k+1} + \beta_0 x$$

Em notação matricial,

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

## Representação em variáveis de estado a partir da equação diferencial II

com

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 ] v + [ 0 ] x$$

A matriz  $A$  acima está na forma denominada **companheira**. Note que, definindo-se novas variáveis de estado  $v_k \leftarrow v_k/\beta_0$ , tem-se a representação

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [ \beta_0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 ] v + [ 0 ] x$$

## Exemplo 1.9

O circuito de terceira ordem do Exemplo 1.6 descrito pela equação diferencial

$$\left( p^3 + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p^2 + \left( \frac{1}{L C_1} + \frac{1}{L C_2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right) p + \frac{1}{L C_1 R_2 C_2} \right) y = 0$$

pode ser representado pela equação de estado

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} v$$

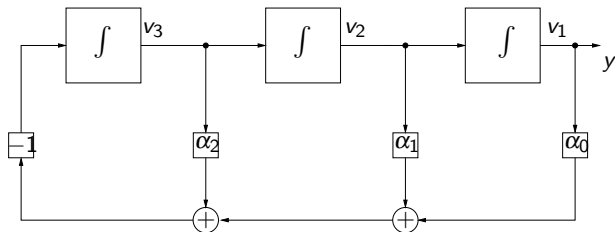
$$\alpha_0 = \frac{1}{L C_1 R_2 C_2}, \quad \alpha_1 = \left( \frac{1}{L C_1} + \frac{1}{L C_2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right), \quad \alpha_2 = \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right)$$

$$y = [ 1 \quad 0 \quad 0 ] v$$

sendo  $v_1 = y$ ,  $v_2 = \dot{y}$  e  $v_3 = \ddot{y}$ . Note que essa escolha produz uma representação por variáveis de estado sistemática e simples, diferente da obtida no Exemplo 1.6,

## Exemplo II

e que ambas produzem a mesma equação diferencial em  $y$ . A Figura 11 mostra a implementação com integradores.



**Figura:** Implementação com integradores do circuito do Exemplo 1.5 (circuito de terceira ordem).

## Propriedade 3 (Caso estritamente próprio — $N(p)$ no vetor de saída)

A equação diferencial (estritamente própria)

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k \quad , \quad N(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^k$$

com  $\alpha_m = 1$  e demais coeficientes constantes pode ser representada pelas equações de estado

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

Considere a escolha de variáveis de estado  $v \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k v_{k+1} \quad \Rightarrow \quad c = [ \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{m-1} ] \quad , \quad d = 0$$

e

$$\dot{v}_1 = v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = v_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad \dot{v}_{m-1} = v_m \quad , \quad \dot{v}_m = \xi$$

## Caso estritamente próprio — $N(p)$ no vetor de saída II

Portanto,

$$v_1 = p^{-m}\xi, \quad v_2 = p^{-m+1}\xi, \quad \dots, \quad v_m = p^{-1}\xi$$

Substituindo as variáveis  $v$  na expressão de  $y$ , tem-se

$$y = \left( \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^{k-m} \right) \xi$$

Da equação  $D(p)y = N(p)x$ , tem-se

$$y = \left( \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^{k-m} \right) \frac{x}{\sum_{k=0}^m \alpha_k p^{k-m}}$$

Igualando as duas expressões, tem-se

$$\left( \sum_{k=0}^m \alpha_k p^{k-m} \right) \xi = x \quad \Rightarrow \quad \xi = \dot{v}_m = - \left( \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k v_{k+1} \right) + x$$



resultando em

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad (4)$$

$$y = [ \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{m-1} ] v + [ 0 ] x \quad (5)$$

## Exemplo 1.10

Considere o sistema (estritamente próprio)

$$D(p)y = N(p)x \Rightarrow (p^3 + 2p^2 + 3p + 4)y = (p^2 + 2p - 1)x$$

Seja

$$y = \beta_0 v_1 + \beta_1 v_2 + \beta_2 v_3 = -v_1 + 2v_2 + v_3$$

e as variáveis de estado

$$\dot{v}_1 = v_2, \dot{v}_2 = v_3, \dot{v}_3 = \xi \Rightarrow v_1 = p^{-3}\xi, v_2 = p^{-2}\xi, v_3 = p^{-1}\xi$$

que resultam em

$$y = -v_1 + 2v_2 + v_3 = -p^{-3}\xi + 2p^{-2}\xi + p^{-1}\xi = (p^{-1} + 2p^{-2} - p^{-3})\xi$$

Da equação  $D(p)y = N(p)x$ , tem-se

## Exemplo II

$$y = (p^{-1} + 2p^{-2} - p^{-3}) \frac{1}{(1 + 2p^{-1} + 3p^{-2} + 4p^{-3})} x$$

Portanto,

$$(1 + 2p^{-1} + 3p^{-2} + 4p^{-3})\xi = x \quad \Rightarrow \quad \xi = -2p^{-1}\xi - 3p^{-2}\xi - 4p^{-3}\xi + x$$

$$\xi = \dot{v}_3 = -4v_1 - 3v_2 - 2v_3 + x$$

resultando em (veja a representação com integradores na Figura 12)

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} v$$

## Exemplo III

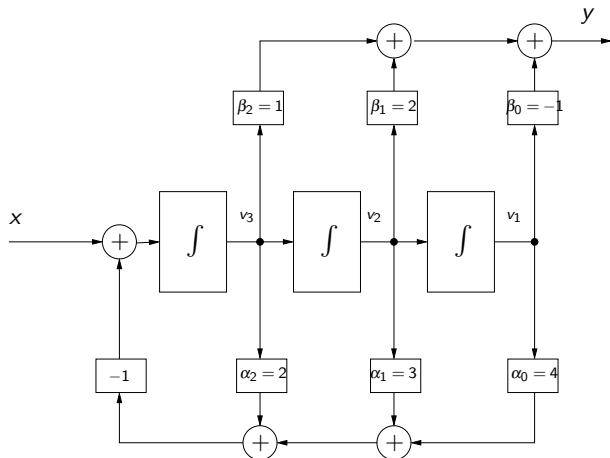


Figura: Realização do Exemplo 1.10 com  $N(p)$  no vetor de saída.

### Propriedade 4 (Caso próprio — $N(p)$ no vetor de saída)

No caso próprio (grau de  $D(p)$  igual ao grau de  $N(p)$ ), dividindo-se  $N(p)/D(p)$  tem-se

$$N(p) = D(p)\beta_m + \bar{N}(p) \quad \Rightarrow \quad D(p)y = N(p)x = D(p)\beta_mx + \bar{N}(p)x$$

com

$$\bar{N}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k \quad , \quad \bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \alpha_k$$

Definindo

$$y = y_1 + \beta_mx \quad \Rightarrow \quad D(p)y_1 = \bar{N}(p)x$$

tem-se um sistema estritamente próprio em  $y_1$ . A matriz  $A$  e o vetor  $b$  são portanto idênticos ao caso estritamente próprio e o vetor  $c$  e  $d$  são dados por

$$c = [ \bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1 \quad \bar{\beta}_2 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_{m-1} ] \quad , \quad d = [ \beta_m ]$$

### Exemplo 1.11 (Circuito *RRLC*)

Considere o circuito descrito na Figura 13, cujas equações são

$$\frac{L}{R_2} \dot{v}_2 + v_2 = C \dot{v}_1 + \frac{1}{R_1} v_1 \quad , \quad x = L \dot{v}_2 + v_1 \quad , \quad y = \frac{L}{R_2} \dot{v}_2$$

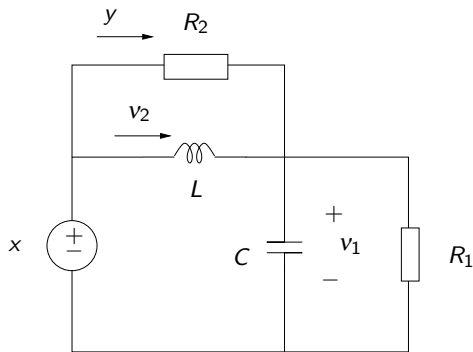


Figura: Circuito *RRLC*.

## Exemplo – Circuito *RRLC* III

A equação diferencial em  $y$  é

$$D(p)y = N(p)x, \quad D(p) = p^2 + \left( \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) p + \frac{1}{LC}, \quad N(p) = \frac{1}{R_2} p \left( p + \frac{1}{R_1 C} \right)$$

A divisão  $N(p)/D(p)$  resulta em  $\beta_2 = 1/R_2$  e

$$\bar{N}(p) = -\frac{1}{R_2^2 C} p - \frac{1}{R_2 LC}$$

A representação em equações de estado na forma companheira (note que as variáveis de estado  $v_1$  e  $v_2$  não mais correspondem à tensão no capacitor  $v_1$  e à corrente no indutor  $v_2$ ) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\left( \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 LC} & -\frac{1}{R_2^2 C} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} x$$



# Equação diferencial a partir da representação de estado (sistema SISO)

## Propriedade 5 (Equação diferencial a partir da representação de estado (sistema SISO))

Utilizando o operador  $p$ , a saída  $y$  do sistema SISO descrito na forma de representação de estado

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$y = cv + dx$$

é dada por

$$y = (c(pI - A)^{-1}b + d)x = \frac{N(p)}{D(p)}x$$

Note que trata-se de uma equação diferencial de ordem  $m$ , pois  $\det(pI - A)$  é um polinômio de ordem  $m$  em  $p$ . Eventualmente, a equação diferencial pode ter ordem menor do que  $m$  se houver cancelamentos entre zeros e pólos.

O sistema é estritamente próprio se  $d = 0$  e próprio para  $d \neq 0$ . Portanto, não é possível descrever na forma de variáveis de estado sistemas com grau de  $N(p)$  maior do que o grau de  $D(p)$ .

## Exemplo 1.12

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

$$(\rho I - A)^{-1} =$$

## Exemplo 1.12

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & p+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{p(p+2)+1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= c(pI - A)^{-1}b + d = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{p^2 + 2p + 1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{-2p}{p^2 + 2p + 1} + 1 = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2p + 1} \end{aligned}$$

## Propriedade 6 (Representação dual)

A representação de estado  $(A, b, c, d)$  produz a mesma equação diferencial que a representação dual de estado  $(A', c', b', d)$ , pois

$$\frac{N(p)}{D(p)} = (c(pI - A)^{-1}b + d)' = (b'(pI - A')^{-1}c' + d)$$

Note que a representação  $(4)-(5)$  é dual da representação  $(4)-(5)$ .

## Exemplo 1.13

A representação de estado

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = [-1 \quad -1] v + [1] x$$

e sua representação dual

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x, \quad y = [0 \quad 1] v + [1] x$$

resultam na mesma equação diferencial

$$(p^2 + 2p + 1)y = p(p + 1)x$$

## Propriedade 7 (Invariância com transformações lineares)

*Transformações lineares biunívocas de variáveis de estado, na forma*

$$\hat{v} = Tv$$

*com  $T$  não singular, não alteram a equação diferencial do sistema, pois*

$$\begin{aligned}v = T^{-1}\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} &= TAT^{-1}\hat{v} + Tbx \quad , \quad y = cT^{-1}\hat{v} + d \\cT^{-1}(pI - TAT^{-1})^{-1}Tb + d &= cT^{-1}(pTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}Tb + d = \\&= cT^{-1}(T(pI - A)T^{-1})^{-1}Tb + d = cT^{-1}T(pI - A)^{-1}T^{-1}Tb + d \\&= c(pI - A)^{-1}b + d = \frac{N(p)}{D(p)}\end{aligned}$$