IA888- Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

Amostragem de Sinais Contínuos

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2014

Teorema 1 (Amostragem)

Um sinal, limitado em freqüência, pode ser representado com erro nulo por amostras igualmente espaçadas de intervalo $T < (2B)^{-1}$*, sendo* B *a máxima freqüência da transformada de Fourier do sinal.*

Antes da demonstração do teorema, alguns resultados preliminares são necessários.

Propriedade 1

As funções sampling *são ortogonais.*

Prova:
Considere as funções *sampling* $\varphi_k(t)$ dadas por

$$\varphi_k(t) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right) \quad , \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

mostradas na Figura 1.

Ortogonalidade II

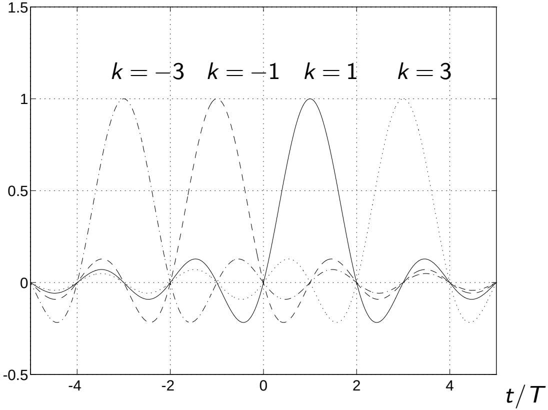

Figura: Funções *sampling* $\mathrm{Sa}\big(\omega_0(t-kT)/2\big)$ para $k=-3,-1,1,3$.

Como as funções $\varphi_k(t)$ são reais, o produto escalar é dado por

$$I_{k\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t)\varphi_\ell(t)dt \quad , \qquad k \text{ e } \ell \text{ inteiros}$$

$$I_{k\ell} = \mathscr{F}\{\varphi_k(t)\varphi_\ell(t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{\varphi_k(t)\} * \mathscr{F}\{\varphi_\ell(t)\}\Big|_{\omega=0}$$

Note que

$$X(\omega) * Y(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y(-\omega)d\omega,$$

$$\Phi_k(\omega) = \mathscr{F}\{\varphi_k(t)\} = TG_{\omega_0}(\omega)\exp(-j\omega kT)$$

pois

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\right\} = \frac{2\pi}{\omega_0}G_{\omega_0}(\omega)$$

Portanto,

$$I_{k\ell} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{TG_{\omega_0}(\omega)\exp(-j\omega kT)}_{\Phi_k(\omega)} \underbrace{TG_{\omega_0}(-\omega)\exp(j\omega\ell T)}_{\Phi_\ell(-\omega)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} T^2 \int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} \exp\big(-j\omega(k-\ell)T\big) d\omega$$

$$I_{k\ell} = \begin{cases} T & ; \quad k = \ell \\ 0 & ; \quad k \neq \ell \end{cases}$$

Observe que as funções $\varphi_k(t)$ são ortogonais e de mesma norma.

Teorema 2 (Amostragem (interpolação))

Se $x(t)$ é tal que

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \; , \; |\omega| > 2\pi B \quad e \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

então

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) Sa\Big(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\Big) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Prova:

Considere a projeção de $x(t)$ na base formada pelas funções *sampling*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \;\; ; \;\; \varphi_k(t) = \mathrm{Sa}\Big(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\Big) \;\; , \;\; \text{com} \;\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Como as funções $\varphi_k(t)$ são ortogonais, os coeficientes α_k são dados por

$$\alpha_k = \frac{< x(t)\varphi_k(t) >}{< \varphi_k^2(t) >} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi_k(t)dt$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\ \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathscr{F}\{\varphi_k(t)\}\Big|_{\omega\,=\,0} = \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)TG_{\omega_0}(-\beta)\exp(j\beta kT)d\beta$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} X(\omega)\exp(j\omega kT)d\omega$$

Note que se $X(\omega) = 0$ para $\mid \omega \mid > 2\pi B$ (limitado em freqüência) e, supondo-se que o intervalo de amostras é tal que

$$2\pi B < \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T < \frac{1}{2B}$$

os limites de integração podem ser estendidos para $-\infty$ e $+\infty$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega kT)d\omega = x(kT)$$

e, portanto,

Interpolação III

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right)$$

Observe que $\alpha_k = x(kT)$, ou seja, os coeficientes da expansão em série são os valores das amostras de $x(t)$ nos instantes kT, desde que $x(t)$ tenha transformada limitada em freqüência.

Exemplo 1.1

Considere o sinal $x(t) = 1$, limitado em freqüência para qualquer $B > 0$.

Se o intervalo de amostragem for $T = 1$, ou seja, $\omega_0 = 2\pi$, as funções $\text{Sa}(\pi t - k)$ formam uma base para qualquer sinal de faixa $B < 0.5$.

A Figura 2 mostra a aproximação de $x(t)$ por um número limitado de amostras, isto é, uma e três amostras, e a Figura 3 para cinco e sete amostras. Note que o intervalo de validade da aproximação aumenta (e que o erro dentro desse intervalo diminui) com o número de amostras.

Exemplo II

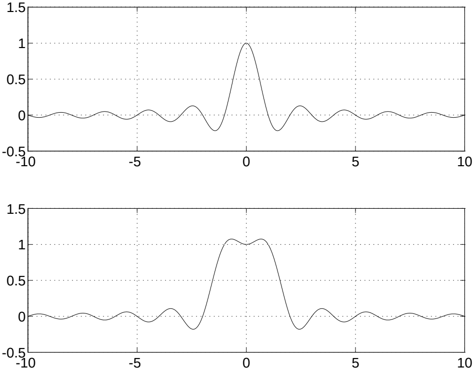

Figura: Sinal $x(t) = 1$ aproximado por um (acima) e três (abaixo) termos de $\mathrm{Sa}\big(\pi(t - kT)\big)$.

Exemplo III

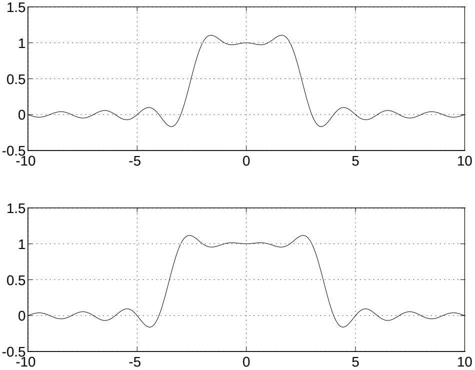

Figura: Sinal $x(t) = 1$ aproximado por cinco (acima) e sete (abaixo) termos de $\mathrm{Sa}\big(\pi(t - kT)\big)$.

Exemplo 1.2

Considere o sinal

$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

com freqüência $\omega_{max} = 2\pi B = 0.5\pi$ e portanto $B = 0.25$. Amostrando o sinal com intervalo de amostragem $T = 1$, tem-se as amostras

$$\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A Figura 4 mostra a aproximação de $x(t)$ por duas e quatro amostras e a Figura 5 mostra o sinal e a aproximação com seis termos.

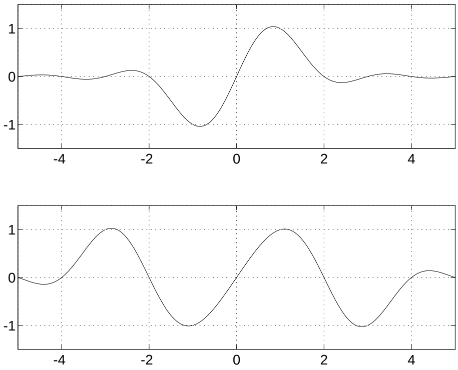

Figura: Sinal sen$(0.5\pi t)$ aproximado por duas (acima) e quatro (abaixo) amostras.

Exemplo III

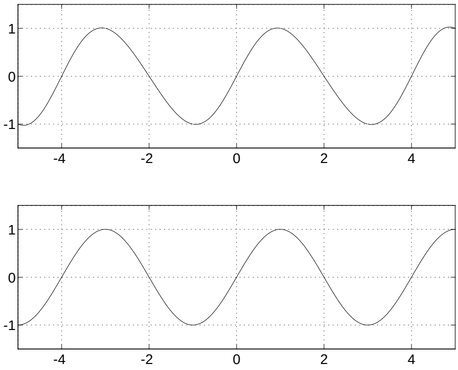

Figura: Sinal sen($0.5\pi t$) (abaixo) e sua aproximação por seis amostras (acima).

Teorema 3 (Amostragem (por impulsos))

Considere um sinal $x(t)$ limitado em freqüência, isto é

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \ , \ |\omega| > 2\pi B \quad e \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_a(t)$ dado por

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

por meio de um filtro linear passa-baixas ideal de faixa ω_0 dado por

$$H(j\omega) = TG_{\omega_0}(\omega)$$

Prova:
O sinal $x_a(t)$ pode ser escrito como

$$x_a(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

chamado de amostragem ideal, resultando em $X_a(\omega)$ dado por

$$X_a(\omega) = \mathscr{F}\{x_a(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathscr{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

A função $X_a(\omega)$ é mostrada na Figura 6 para $\omega_0/2 > 2\pi B$ (acima) e para $\omega_0/2 < 2\pi B$ (abaixo). Note que se $\omega_0/2$ for menor do que a máxima freqüência angular $2\pi B$ da transformada de Fourier do sinal $x(t)$, há superposição (*aliasing*) dos espectros em $X_a(\omega)$.

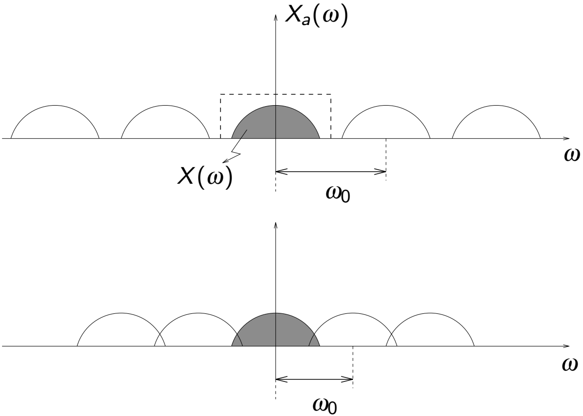

Figura: Função $X_a(\omega)$ para $\omega_0/2 > 2\pi B$ (acima) e para $\omega_0/2 < 2\pi B$ (abaixo).

Para $X(\omega)$ limitado em freqüência e ω_0 adequado ($\omega_0/2 > 2\pi B$), o sinal $x(t)$ pode ser recuperado pela filtragem de $X_a(\omega)$, isto é, multiplicando a expressão de $X_a(\omega)$ de ambos os lados por $TG_{\omega_0}(\omega)$, tem-se

$$X(\omega) = X_a(\omega)\,TG_{\omega_0}(\omega)$$

A correspondente expressão temporal é dada por

$$x(t) = x_a(t) * \mathscr{F}^{-1}\{TG_{\omega_0}(\omega)\} = \left\{x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right\} * \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)$$

resultando em

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right)$$

Observe que, calculando $x(t)$ nos pontos $t = mT$, $m \in \mathbb{Z}$, tem-se

Amostragem por impulsos V

$$x(mT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(m-k)T\right) \;\; ; \;\; \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(m-k)T\right) = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k \\ 1 & , \quad m = k \end{cases}$$

e portanto a contribuição das demais amostras no instante $t = mT$ é sempre nula, pois trata-se de uma interpolação.

Exemplo 1.3 (Interpolação Linear)

Considere um conjunto de pontos $x(kT)$ e a função *sampling* aproximada

$$\mathrm{Saa}(\frac{\omega_0}{2}t) = \mathrm{Tri}_{2T}(t) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

mostrada na Figura 7, junto com a função *sampling*, para $T = 1$.

Exemplo – Interpolação Linear II

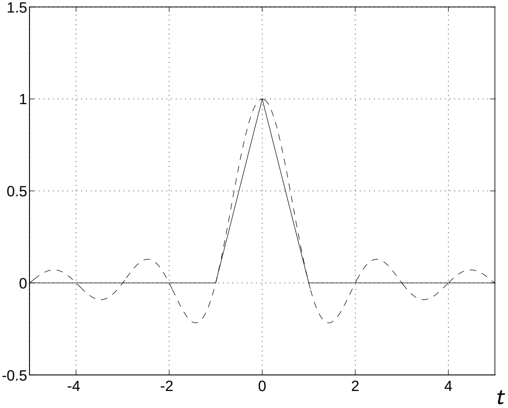

Figura: $\mathrm{Sa}(\pi t)$ (tracejada) e $\mathrm{Tri}_2(t)$ (contínua).

Exemplo – Interpolação Linear III

A interpolação

$$x_{\mathrm{Tri}}(t) = \sum_k x(kT)\mathrm{Saa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right)$$

resulta na soma de segmentos de retas e requer um cálculo bem mais simples do que a interpolação baseada no Teorema da amostragem, dada por

$$x_{\mathrm{Sa}}(t) = \sum_k x(kT)\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right)$$

Observe que $x_{\mathrm{Tri}}(t)$ corresponde à união dos pontos $x(kT)$ por segmentos de reta (interpolação linear). A Figura 8 mostra a interpolação linear e a Figura 9 mostra a interpolação construída com funções *sampling* a partir das amostras com $T = 0.25$ da função

$$x(t) = \mathrm{sen}(t) + \mathrm{sen}(\pi t) + \mathrm{sen}(2\pi t)$$

cuja máxima freqüência é $B = 1$ Hz e, portanto, satisfazendo a condição do teorema da amostragem $T < (2B)^{-1}$. Na Figura 9, as maiores discrepâncias ocorrem nas bordas, devido à não utilização de amostras fora do intervalo mostrado.

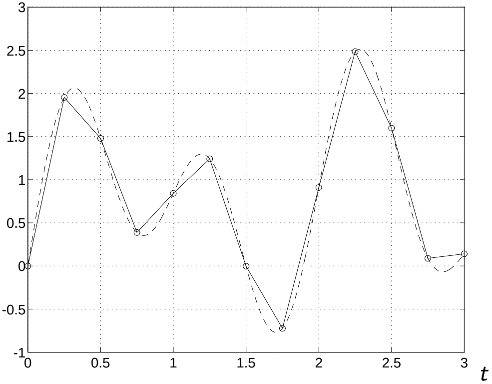

Figura: $\text{sen}(t) + \text{sen}(\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$ (tracejada) e interpolação linear (contínua).

Exemplo – Interpolação Linear V

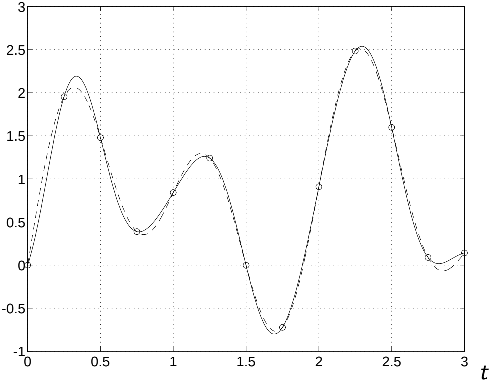

Figura: $\text{sen}(t) + \text{sen}(\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$ (tracejada) e interpolação com a função *sampling* (contínua).

Teorema 4 (Amostragem (por impulsos aproximados))

Considere um sinal $x(t)$ limitado em freqüência, isto é

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \ , \ |\omega| > 2\pi B \quad e \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_a(t)$ dado por

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t - kT) \ \ ; \ \ 0 < \Delta < T$$

por meio de um filtro linear passa-baixas ideal de faixa ω_0 dado por

$$H(j\omega) = T G_{\omega_0}(\omega)$$

Prova: Note que $x_a(t)$ é construído com $x(t)$ variando no intervalo $0 < \Delta < T$, e não fixo em $x(kT)$ como no caso da amostragem ideal. O sinal $x_a(t)$ pode ser escrito como

Amostragem por impulsos aproximados II

$$x_a(t) = x(t) \sum_k \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \delta(t - kT)$$

resultando em

$$X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathscr{F}\Big\{ \sum_k \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \delta(t - kT) \Big\}$$

$$\mathscr{F}\Big\{ \sum_k \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \delta(t - kT) \Big\} = \mathscr{F}\Big\{ \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \sum_k \delta(t - kT) \Big\} =$$

$$= \mathrm{Sa}\big(\frac{\Delta}{2}\omega\big) \omega_0 \sum_k \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_k \mathrm{Sa}\big(\frac{\Delta}{2} k\omega_0\big) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_0 \sum_k \mathrm{Sa}\big(\frac{\Delta}{2} k\omega_0\big) \delta(\omega - k\omega_0) =$$

$$\frac{1}{T} X(\omega) + \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} \mathrm{Sa}\big(\frac{\Delta}{2} k\omega_0\big) X(\omega - k\omega_0)$$

e portanto $X(\omega) = T G_{\omega_0}(\omega) X_a(\omega)$

Propriedade 2 (Amostragem (por pulsos))

Considere um sinal $x(t)$ limitado em freqüência, isto é

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \ , \ |\omega| > 2\pi B \quad e \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_p(t)$ dado por

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)p(t-kT)$$

sendo $p(t)$ um pulso com transformada de Fourier $P(\omega)$, por meio de um filtro linear passa-baixas de faixa ω_0 dado por

$$H(j\omega) = \frac{TG_{\omega_0}(\omega)}{P(\omega)}$$

Prova:
O sinal $x_p(t)$ pode ser escrito como

Amostragem por pulsos II

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)p(t) * \delta(t - kT) = p(t) * x_a(t)$$

com

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

resultando em

$$X_p(\omega) = P(\omega)X_a(\omega) \quad , \quad X_a(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

Portanto,

$$X(\omega) = \frac{TG_{\omega_0}(\omega)}{P(\omega)} X_p(\omega)$$