1ª Questão: Determine a média e a variância de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ que tem como transformada Z

$$\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{z^2}{(z^2-2)^2}, \quad |z| < \sqrt{2}$$

Solução: Média = 6, variância = 16.

2ª Questão: Considere o sistema

$$y[n] = n\sum_{k=1}^{+4} kx[n+k]$$

a) Esboce graficamente a resposta impulsiva.
Solução:

$$h[n] = n(\delta[n+1] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+3] + 4\delta[n+4]) = -\delta[n+1] - 4\delta[n+2] - 9\delta[n+3] - 16\delta[n+4]$$

b) Classifique o sistema quanto à linearidade, invariância no tempo, causalidade e BIBO estabilidade.
Solução: Linear, variante no tempo, não causal e não BIBO

3ª Questão: Considere o sistema SISO (*Single-Input Single-Output*)

$$y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t+4} (t-\beta)x(\beta)d\beta$$

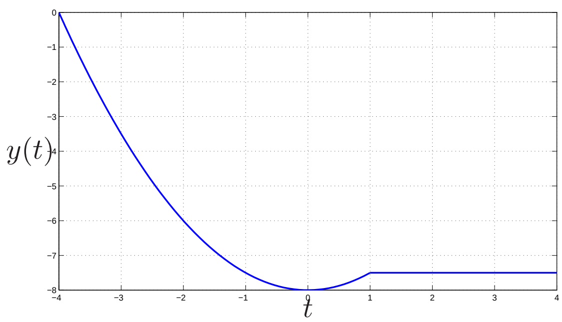
a) Determine a resposta ao impulso
b) Classifique o sistema quanto à: linearidade, invariância no tempo, causalidade e BIBO estabilidade.
c) (Bônus 1 ponto extra): Compute e esboce graficamente $y(t)$ para $x(t) = u(t)$ (degrau).

Solução:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\beta)\big(u(t+4-\beta) - u(t-1-\beta)\big)\delta(\beta)d\beta = t\big(u(t+4) - u(t-1)\big)$$

Linear, invariante no tempo, não causal e BIBO estável.

Bônus: $y(t) = (\frac{1}{2}t^2 - 8)u(t+4) - (\frac{1}{2}t^2 - 1/2)u(t-1)$



4ª Questão: Determine os coeficientes da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - k5\pi), \quad p(t) = -2G_1(t+1) + (1-t)G_1(t-0.5)$$

Solução:

$$c_0 = -\frac{3}{10\pi}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi jk}\left(-2\exp(3jk/5) + 2\exp(jk/5) + 1\right) - \frac{5}{4\pi k^2}\left(-1 + \exp(-2jk/5)\right)$$

5ª Questão: Seja a equação a diferenças $(p^2 - 3p + 2)y[n] = x[n]$.

(a) Arbitre a estrutura para $y_f[n]$ considerando as seguintes entradas:

$$x_1[n] = -2n \qquad x_2[n] = n^2 + (2)^n \qquad x_3[n] = 3^n + 1 \quad x_4[n] = \cos(\omega n)$$

(b) Para $x[n] = x_1[n]$, determine $y_f[n]$.

(c) Para $x[n] = x_1[n]$, determine $y[n]$ considerando $y[0] = 1,\ y[1] = 8$.

Solução:

(a)

$$y_{f1}[n] = an + bn^2 \qquad y_{f2}[n] = an(2)^n + bn + cn^2 + dn^3 \qquad y_{f3}[n] = a3^n + bn$$
$$y_{f4}[n] = a(e^{j\omega})^n + b(e^{-j\omega})^n$$

(b) $y_f[n] = n + n^2$

(c) $y[n] = -4 + 5(2)^n + n + n^2$

6ª Questão: Determine α e β que minimizam o erro médio quadrático da representação da função $x(t) = (t^2 + 1)G_3(t - 1.5)$ na base formada pelas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, com

$$x(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) + \epsilon(t) \quad , \quad f_1(t) = (t + 1)G_3(t - 1.5) \quad , \quad f_2(t) = G_3(t - 1.5)$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7.5 \\ 7.5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 147/4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3 \quad , \quad \beta = -3.5$$

7ª Questão: Determine a transformada Z inversa (isto é, a seguência $x[n]$) de

$$X(z) = \frac{5z^4 + 24z^3 + 30z^2 + 8z}{z(z+1)(z+2)^2}$$

para a) $|z| > 2$, b)$1 < |z| < 2$.

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z+1} + \frac{2}{(z+2)^2}$$

a)

$$x[n] = 2\delta[n] + \left(3(-1)^n + 2\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}(-2)^{(n-1)}\right)u[n]$$

b)

$$x[n] = 2\delta[n] + 3(-1)^n u[n] - 2\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}(-2)^{(n-1)}u[-n-1]$$