Nome: .... **RA:** ....

1.1ª Questão: Determine a transformada Z inversa (isto é, a seguência $x[n]$) de

$$X(z) = \frac{3z^4 + 16z^3 + 19z^2 + 4z}{z(z+1)(z+2)^2} \qquad \text{para } |z| > 2.$$

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z+1} + \frac{3}{(z+2)^2}$$

$$x[n] = \delta[n] + \left(2(-1)^n + 3\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}(-2)^{(n-1)}\right)u[n]$$

1.2ª Questão: a) Determine a solução forçada de

$$(p^2 - p - 2)y[n] = 2^{n+1}$$

Solução:

$$y_f[n] = (1/3)n2^n$$

b) Determine a solução de

$$(p^2 - p - 2)y[n] = 2^{n+1} \quad , \quad y[0] = 0 \ , \ y[1] = 1$$

Solução:

$$y[n] = (1/9)2^n - (1/9)(-1)^n + (1/3)n2^n$$

c) Obtenha uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais cuja solução seja solução da equação não homogênea descrita no item b).

Solução:

$$(p+1)(p-2)^2 y[n] = 0 \ , \quad y[0] = 0 \ , \ y[1] = 1 \ , \ y[2] = 3$$

2.1ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine a resposta à entrada nula para a condição inicial $v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$

Solução:

$$x_{en}(t) = \exp(-t)\begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 2t \end{bmatrix} \ , \ y_{en} = \exp(-t) - 2t\exp(-t)$$

b) Determine a resposta ao estado inicial nulo para $x(t) = 1$

Solução:

$$y_{cin}(t) = t\exp(-t)$$

c) (Bônus 5 pontos) Determine um sistema homogêneo e as condições iniciais que produzam a mesma solução do sistema acima para $v(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}'$ e $x(t) = 1$

Solução:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \tilde{v}(0)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

2.2ª Questão: Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é 0.5 rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\pi)p(t-k\pi)$$

sendo $p(t) = x(t)y(t)$, com $x(t)$ e $y(t)$ ilustrados na Figura 1.

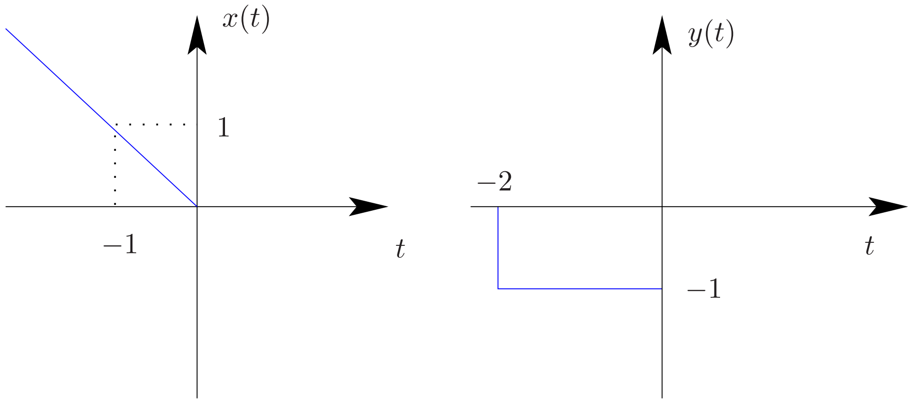
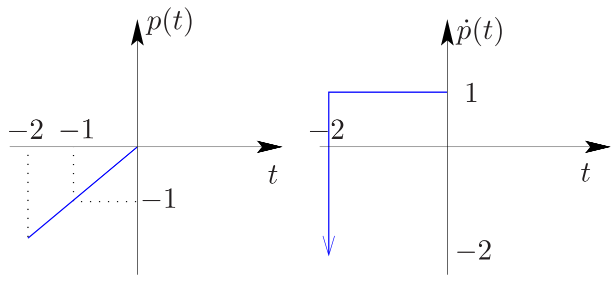


Figura 1: Gráficos de $x(t)$ e $y(t)$

Solução:



$$\dot{p}(t) = G_2(t+1) - 2\delta(t+2), \ \mathcal{F}(\dot{p}(t)) = \left(2\text{Sa}(\omega)e^{j\omega} - 2e^{2j\omega}\right), \ \Rightarrow$$

$$P(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(2\text{Sa}(\omega)e^{j\omega} - 2e^{2j\omega}\right) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{e^{2j\omega}-1}{j\omega} - 2e^{2j\omega}\right)$$

$$T = \pi, \ H(j\omega) = \frac{\pi G_2(\omega)}{P(\omega)}$$

3.1ª Questão: Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -12 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine um ganho de realimentação de estados que aloque os autovalores de $A - bk$ em -2 e -3 considerando

$$\text{(a)} \;\; K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \;\; K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

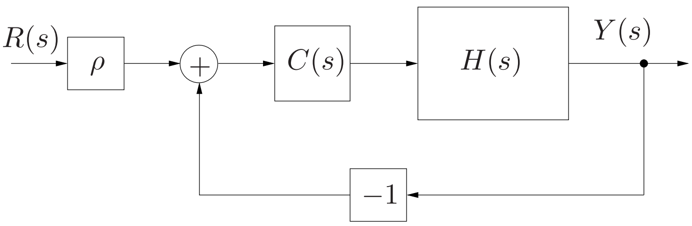
Solução:

$$\text{(a)} \;\; K = \begin{bmatrix} -3.3 & -2.3 \\ -3.3 & -2.3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \;\; K = \begin{bmatrix} 7.3793 & 3.7931 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2ª Questão: Considere o sistema linear descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s + 5/3}{s^2 + 2s + 1}$$

e o esquema de realimentação unitária mostrado na figura



a) Se possível, obtenha um controlador próprio de ordem 0 que aloque os pólos de malha fechada em -2 e -3.
b) Se possível, obtenha um controlador próprio de ordem 1 que aloque os pólos de malha fechada em -1, -2 e -3.
c) Se possível, obtenha um controlador estritamente próprio de ordem 1 que aloque os pólos de malha fechada em -1, -2 e -3.

Solução:

$$(a) \; C(s) = \frac{3}{1}, \qquad (b) \; C(s) = \frac{3s+3}{s+1}, \qquad (c) \; \text{não existe}$$

3.3ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \quad , \quad \dot{v}_2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2 - 1$$

Solução:

$$(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1) \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

b) Determine a estabilidade (estável, assintoticamente estável ou instável) dos sistemas linearizados em torno de todos os pontos de equilíbrio encontrados.

Solução:

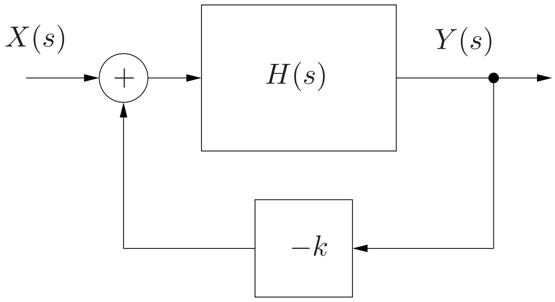
$$(1,1) \; , \; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; , \; \lambda_{1,2} = 1 \pm j \; , \; \text{instável}$$

$$(-1,-1) \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \lambda_{1,2} = -1 \pm j \ , \ \text{assint. estável}$$

$$(1,-1),(-1,1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \ , \ \text{instável}$$

3.4ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$



Solução:

$$D(s) = s^3 + (3+k)s^2 + (4-2k)s + (2+2k) \quad , \quad -1 < k < 1.44$$