IA881 – Otimização Linear

Aula: Método Simplex Revisado

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2021

Tópicos

Simplex Revisado I

- Nesta aula é apresentada uma versão aprimorada do método Simplex, chamada Simplex Revisado. A principal vantagem é a possibilidade de trabalhar-se com um quadro (matriz) reduzida ao longo das iterações, poupando espaço de armazenamento na memória de processamento rápido.

- Para verificar que o método Simplex requer um número reduzido de informações para executar uma iteração, suponha que uma solução básica factível está disponível, com uma matriz associada $\mathbf{B}^{-1}$ conhecida. A seguinte matriz pode ser construída

Base Inversa	LD
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B^T\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

sendo $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ e $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Essa matriz pode ser chamada de *tableau* revisado, podendo-se vista como uma partição do *tableau* convencional se $\mathbf{w}$ for nulo e $\mathbf{B}^{-1} = I$. Por exemplo, uma base inicial formada exclusivamente por variáveis de folga. A coluna LD é exatamente a mesma do *tableau* convencional. Executando os passos do método Simplex, na sequência determina-se os valores $z_k - c_k$, dados por $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$. Note que $\mathbf{a}_j$ e c_j são consultados das matrizes originais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{c}$.

Simplex Revisado II

Caso exista alguma variável x_k a entrar na base, necessita-se consultar a coluna atualizada de x_k, que pode ser calculada por meio de $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$. Caso não seja detectada solução ilimitada, acrescenta-se a coluna associada a x_k ao lado do *tableau* reduzido, como mostrado a seguir

Base Inversa	LD		x_k
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B^T\bar{\mathbf{b}}$		$z_k - c_k$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{b}_1$		y_{1k}
	$\bar{b}_2$		y_{2k}
	$\vdots$		$\vdots$
	$\bar{b}_r$		y_{rk}
	$\vdots$		$\vdots$
	$\bar{b}_m$		y_{mk}

Note que todas as outras informações do *tableau* convencional estão "escondidas". Nesse ponto o teste de bloqueio pode ser aplicado para verificar qual variável

Simplex Revisado III

básica deve sair da base. Mais importante, pivotando sobre y_{rk} fornece os novos valores de $\mathbf{w}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{c}_B^T\bar{\mathbf{b}}$, e o processo é repetido.

Exemplo I

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir pelo método Simplex revisado

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 4 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

Introduz-se as variáveis de folga x_7, x_8 e x_9 e adota-se como base inicial $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9]$. Nesse caso, $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = [0, 0, 0]$ e $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$.

Iteração 1:

	Base Inversa			*LD*
z	0	0	0	0
x_7	1	0	0	6
x_8	0	1	0	4
x_9	0	0	1	4

Exemplo II

Computando $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$, tem-se

$$\begin{array}{lll} z_1 - c_1 = 1, & z_2 - c_2 = 2, & z_3 - c_3 = -1, \\ z_4 - c_4 = 1, & z_5 - c_5 = 4, & z_6 - c_6 = -2, \end{array}$$

Assim $k = 5$ e x_5 entra na base:

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é inserir o vetor $[z_5 - c_5, \mathbf{y}_5^T]^T$ ao lado do *tableau* revisado e efetuar o pivotamento sobre $y_{35} = 2$

	Base Inversa			LD	x_5			Base Inversa			LD
z	0	0	0	0	4		z	0	0	-2	-8
x_7	1	0	0	6	1	$\Rightarrow$	x_7	1	0	$-1/2$	4
x_8	0	1	0	4	0		x_8	0	1	0	4
x_9	0	0	1	4	2		x_5	0	0	$1/2$	2

Iteração 2:

Exemplo III

A partir de $\mathbf{w} = [0, 0, -2]$, tem-se

$$\begin{array}{lll} z_1 - c_1 = 1, & z_2 - c_2 = 2, & z_3 - c_3 = -3, \\ z_4 - c_4 = -1, & z_6 - c_6 = -4, & z_9 - c_9 = -2, \end{array}$$

Assim $k = 2$ e x_2 entra na base:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é inserir o vetor $[z_2 - c_2, \mathbf{y}_2^T]^T$ ao lado do *tableau* revisado e efetuar o pivotamento sobre $y_{12} = 2$

	Base Inversa			LD	x_2			Base Inversa			LD
z	0	0	-2	-8	2		z	-2	0	-1	-16
x_7	1	0	$-1/2$	4	1	$\Rightarrow$	x_2	1	0	$-1/2$	4
x_8	0	1	0	4	-1		x_8	0	1	$-1/2$	8
x_5	0	0	$1/2$	2	0		x_5	0	0	$1/2$	2

Iteração 3:

Exemplo IV

Nesse passo tem-se $\mathbf{w} = [-2, 0, -1]$, que fornece

$$\begin{array}{lll} z_1 - c_1 = -1, & z_3 - c_3 = -4, & z_4 - c_4 = -2, \\ z_6 - c_6 = -5, & z_7 - c_7 = -2 & z_9 - c_9 = -1, \end{array}$$

A solução atual é ótima.

Complexidade Computacional I

- A Tabela 1 mostra a complexidade computacional associada aos métodos Simplex e Simplex Revisado em termos no número de operações de multiplicação e adição.

Tabela 1: Complexidades numéricas dos métodos Simplex e Simplex Revisado.

Método		Operação: Pivotamento	Operação: $z_k - c_k$	Operação: Total
Simplex	mult.	$(m+1)(n-m+1)$	–	$m(n-m)+n+1$
	adição	$m(n-m+1)$	–	$m(n-m+1)$
Simplex R.	mult.	$(m+1)^2$	$m(n-m)$	$m(n-m)+(m+1)^2$
	adição	$m(m+1)$	$m(n-m)$	$m(n+1)$

- Com relação ao espaço de armazenamento rápido, são necessárias matrizes de dimensões $(m+1)\times(m+1)$ e $(m+1)\times(n+1)$ para os métodos Simplex Revisado e Simplex, respectivamente. Se $n \gg m$, o método Simplex Revisado terá uma clara vantagem.

Complexidade Computacional II

- A complexidade do método Simplex Revisado no cômputo dos coeficientes $z_k - c_k$ pode ser muito reduzida diante da esparsidade da matriz $\mathbf{A}$.

- Existe uma vantagem de calcular os coeficientes $z_k - c_k$ e as colunas $\mathbf{y}_k$ com os dados originais da matriz $\mathbf{A}$ no método Simplex Revisado: evita-se erros de arredondamento e truncamento, que ocorrem naturalmente no método Simplex ao atualizar o *tableau* inteiro.

- Mais otimizações no método Simplex Revisado são possíveis (ver [BJS10, Seção 5.1]).

Referências Bibliográficas

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali.
Linear Programming and Network Flows.
Jonh Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 4 edition, 2010.