

# IA881 – Otimização Linear

## Aula: Método Simplex

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

1<sup>o</sup> Semestre 2023

- 1 Pontos Extremos e Otimalidade
- 2 Soluções Básicas
- 3 Soluções Básicas Factíveis e Pontos Extremos
- 4 Propriedades e Geometria do Método Simplex
- 5 Álgebra do Método Simplex
- 6 O Método Simplex
- 7 Método Simplex no forma *Tableau*

# Recapitulando

- Observou-se na Figura 6 da aula “Introdução à Programação Linear” que quando uma solução ótima de um PL existe, então um ponto extremo ótimo também existe. Na sequência mostra-se que essa observação é sempre verdadeira.
- Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{s. a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

e sejam  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ , e  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_\ell$  os pontos extremos e as direções extremas associadas às restrições, respectivamente. Da aula anterior sabemos que qualquer ponto que atende as restrições pode ser representado na forma

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \mathbf{d}_i, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, \ell$$

## Representação Equivalente do PL

Portanto, o problema (1) pode ser equivalentemente representado em termos das variáveis  $\lambda_j$  e  $\mu_i$  na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j) \lambda_j + \sum_{i=1}^{\ell} (\mathbf{c}^T \mathbf{d}_i) \mu_i \\ \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \mu_i \geq 0, j = 1, \dots, k, i = 1, \dots, \ell \end{aligned} \quad (2)$$

■ Assume-se que  $k \geq 1$ . Observações: (a) se  $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_i < 0$  para **algum**  $i$ , então o valor mínimo da função objetivo é  $-\infty$  (note que  $\mu_i$  são variáveis não negativas e **irrestritas**); (b) se  $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_i \geq 0$  para **todo**  $i$ , então garante-se uma solução ótima **limitada** (em caso de factibilidade); (c) para minimizar o termo  $\sum_{j=1}^k (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j) \lambda_j$ , escolhe-se o menor  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j$  (por que?), garantindo uma solução ótima em um ponto extremo; (d) caso aconteça  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{j_1} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{j_2} = \dots = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{j_p}$  então existem **múltiplas** soluções ótimas, dadas por qualquer combinação convexa dos pontos extremos  $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_p}$ .

## Exemplo I

- Exemplo: Considere o poliedro  $\mathbb{X}$  definido pelas restrições

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + 2x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

que contém 3 pontos extremos e 2 direções extremas dadas por

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e ilustradas na Figura 1 (a). Ao minimizar a função  $x_1 - 3x_2$  na região factível, percebe-se que o problema é ilimitado. Nesse caso temos

$$\mathbf{c}^T [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2] = [0 \quad -6 \quad -10 \quad 1 \quad -1]$$

## Exemplo II

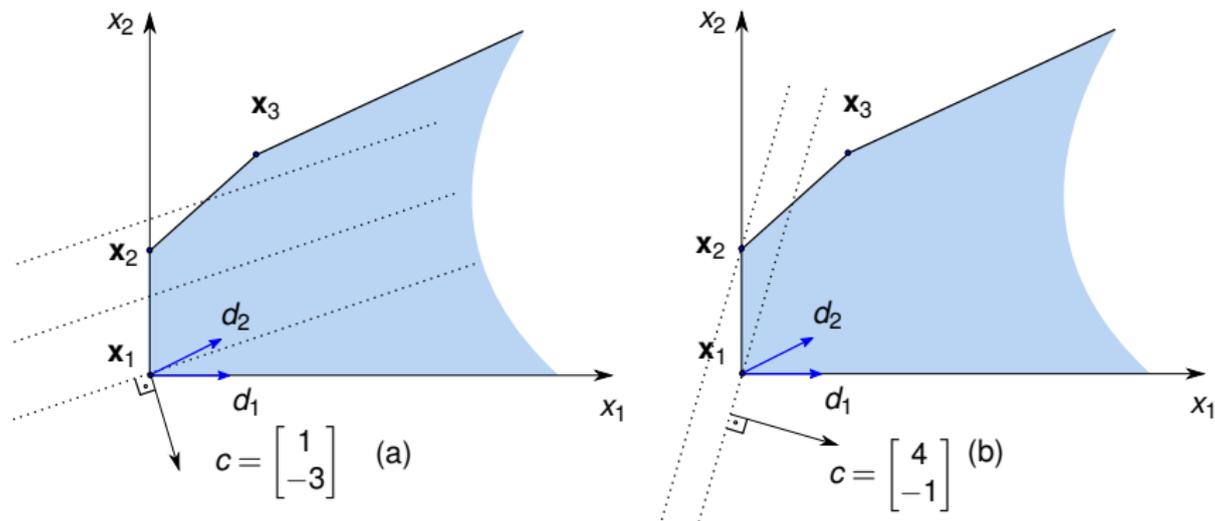


Figura 1: Direções extremas e otimalidade: (a) valor ótimo ilimitado. (b) valor ótimo limitado.

## Exemplo Modificado

Reformulando o problema na forma (2), tem-se

$$\begin{aligned} \min \quad & 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 + \mu_1 - \mu_2 \\ \text{s. a} \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \mu_i \geq 0, j = 1, \dots, 3, i = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

Claramente a função objetivo é ilimitada ( $-\infty$ ) pois é possível escolher  $\mu_2 \rightarrow \infty$ .

■ Alterando a função objetivo para  $4x_1 - x_2$ , a solução ótima ocorre no ponto extremo  $\mathbf{x}_2 = [0, 2]^T$ , como mostra a Figura 1 (b). Nesse caso temos

$$\mathbf{c}^T [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2] = [0 \quad -2 \quad 4 \quad 4 \quad 7]$$

com a seguinte reformulação

$$\begin{aligned} \min \quad & 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\mu_1 + 7\mu_2 \\ \text{s. a} \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \mu_i \geq 0, j = 1, \dots, 3, i = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

Como os coeficientes de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são positivos, escolhe-se  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . Adotando  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ , tem-se a solução ótima no ponto extremo  $\mathbf{x}_2$ .

# Interpretação Gráfica

- Interpretação gráfica: minimizar  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  corresponde a mover o plano  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = z$ , sendo  $z$  uma constante, na direção  $-\mathbf{c}$  o mais longe possível. No caso  $\mathbf{c} = [1, -3]^T$  o plano pode ser movido indefinidamente e ainda permanecer dentro da região factível, portanto o valor ótimo é  $-\infty$ . Por outro lado, quando  $\mathbf{c} = [4, -1]^T$ , só é possível mover o plano até  $\mathbf{x}_2$  permanecendo dentro da região factível.

## Definições I

- Considere o sistema de restrições  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq 0$ , com  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  e assumamos  $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = m$ .

**Definição 1** (Solução Básica)

Seja a decomposição  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ , com  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertível e  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$ . A solução  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T]^T$  para o sistema de equações  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , sendo

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_N = 0$$

é chamada de *solução básica* do sistema.

**Definição 2** (Solução Básica Factível)

Se  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T]^T$  é uma solução básica do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  e  $\mathbf{x}_B \geq 0$ , então  $\mathbf{x}$  é chamada de *solução básica factível* do sistema.

- A matriz  $\mathbf{B}$  é chamada de *matriz básica* (ou base) e  $\mathbf{N}$  é chamada de *matriz não básica*. As componentes de  $\mathbf{x}_B$  são chamadas de *variáveis básicas* (ou variáveis

## Definições II

dependentes) e as componentes de  $\mathbf{x}_N$  são chamadas de **variáveis não básicas** (ou variáveis independentes)

■  $\mathbf{x}_B > 0$ , então  $\mathbf{x}$  é chamada de uma solução básica factível **não degenerada**. Se  $\mathbf{x}_B$  tem pelo menos uma componente nula, então  $\mathbf{x}$  é chamada de uma solução básica factível **degenerada**.

## Exemplo

- Exemplo: Considere o conjunto poliedral definido pelas desigualdades

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

que pode ser representado por restrições de igualdade ao introduzir-se variáveis de folga, isto é,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_2 + x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$$

Note que a matriz  $\mathbf{A}$  é dada por

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo - Continuação

Soluções básicas factíveis podem ser encontradas por meio de matrizes quadradas  $\mathbf{B}$  tais que  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  seja não negativo. Possibilidades:

$$(1) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo - Representação Gráfica

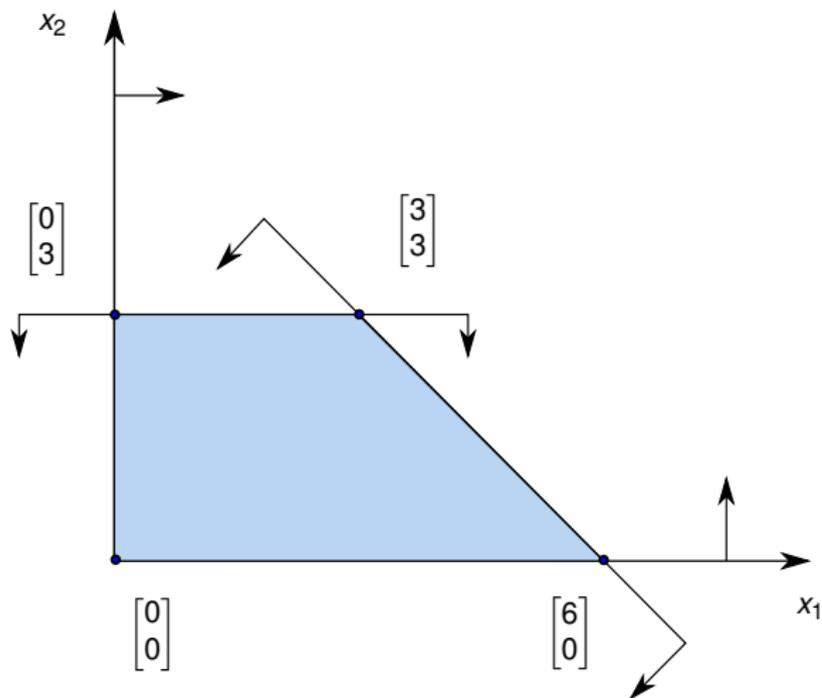


Figura 2: Soluções básicas factíveis.

## Exemplo - Continuação

Note que (4) é apenas uma solução básica. As quatro soluções básicas factíveis são:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Projetando no espaço  $(x_1, x_2)$ , tem-se os pontos

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que são os pontos extremos da região factível (ver Figura 2). Neste exemplo o número máximo de bases é menor ou igual a

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Note que  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$  não gera uma base.

# Número de Soluções Básicas

- No caso geral, o número máximo de soluções básicas é dado por

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- Maneira alternativa de visualizar soluções básicas: cada desigualdade (incluindo as restrições de não negatividade), é unicamente associada a uma certa variável. Por exemplo, a restrição  $x_1 + x_2 \leq 6$  pode ser associada à variável  $x_3$ , e  $x_3 = 0$  define a fronteira do semi-espço correspondente a  $x_1 + x_2 \leq 6$ . A restrição  $x_1 \geq 0$  é associada à variável  $x_1$  (ela mesma) e a reta  $x_1 = 0$  define a fronteira do semi-espço definido pela restrição  $x_1 \geq 0$ . A Figura 3 apresenta uma ilustração das fronteiras de todas as restrições do exemplo anterior.
- Soluções básicas correspondem à interseção de duas retas. As linhas correspondem às variáveis não básicas. Note que não há interseção entre as linhas  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 0$ , portanto não existem soluções básicas em que essas duas variáveis são não básicas. Determinada a região factível, determina-se as soluções básicas factíveis.

## Interpretação Gráfica

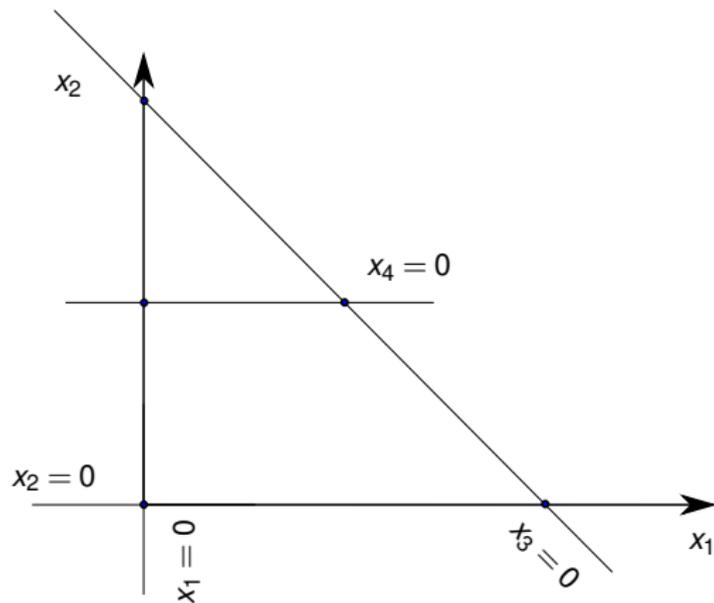


Figura 3: Soluções básicas factíveis.

$$x_1 + x_2 \leq 6 \rightarrow x_3, \quad x_2 \leq 3 \rightarrow x_4, \quad x_1 \geq 0 \rightarrow x_1, \quad x_2 \geq 0 \rightarrow x_2$$

## Exemplo I

- Exemplo: Considere o sistema de desigualdades

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

ilustrado na Figura 4. A região factível é a mesma do exemplo anterior, uma vez que a restrição  $x_1 + 2x_2 \leq 9$  é “redundante”. Introduzindo-se variáveis de folga, chega-se no sistema de igualdades

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$$

## Exemplo - Região Factível

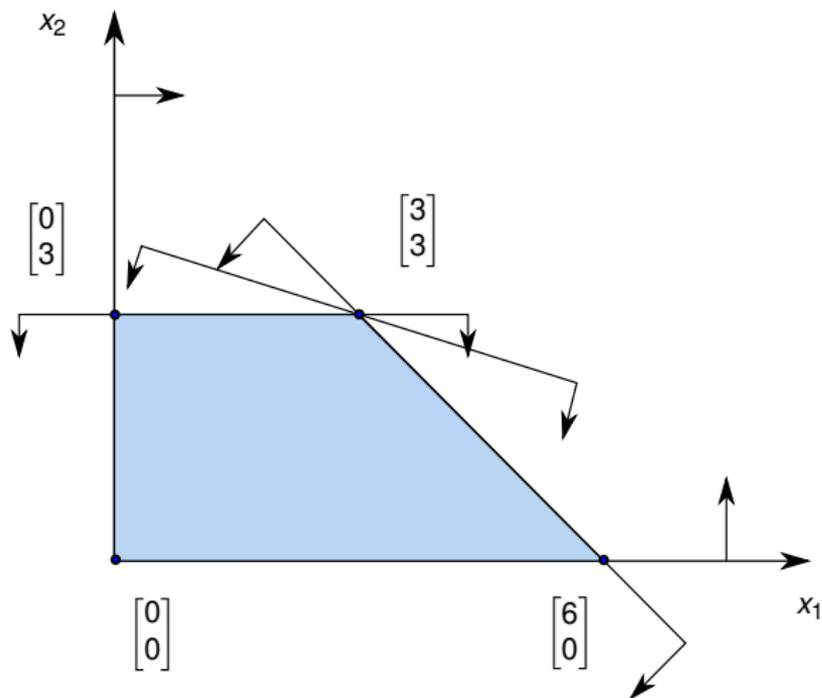


Figura 4: Soluções básicas factíveis.

## Exemplo - Continuação

Note que

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere a solução básica factível  $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ :

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta solução é degenerada, pois  $x_3 = 0$ . Agora considere duas outras soluções básicas factíveis

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo - Continuação

As três bases fornecem a mesma solução básica factível, representando o mesmo ponto extremo projetado no  $\mathbb{R}^2$ , dado por  $[3, 3]^T$ . Esta solução básica factível é **degenerada** pois cada base associada tem uma variável básica nula. Os pontos extremos restantes (ver Figura 4) correspondem a soluções básicas factíveis não degeneradas.

- Note que a degeneração não acontece apenas quando existem restrições redundantes (ver Figura 7 da aula Geometria da Programação Linear).

# Relação entre soluções básicas factíveis e pontos extremos I

- O próximo teorema mostra que soluções básicas factíveis e pontos extremos são conceitos equivalentes.

## Teorema 1

Seja  $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$  um poliedro não vazio.  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto extremo de  $\mathbb{X}$  se, e somente se,  $\bar{\mathbf{x}}$  é uma solução básica factível.

- $\Leftarrow$  Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  uma solução básica factível e suponha que

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ v_{m+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1, u, v \in \mathbb{X}$$

## Relação entre soluções básicas factíveis e pontos extremos II

É necessário mostrar que  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  para que  $\bar{\mathbf{x}}$  seja ponto extremo. Claramente, para  $i = m+1, \dots, n$ , tem-se que  $u_i = v_i = 0$ . Como  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ , tem-se que  $\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Adotando a decomposição  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ , tem-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^m (u_j - v_j) \mathbf{b}_j + \sum_{i=m+1}^n (u_i - v_i) \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \Rightarrow u_j = v_j$$

pois as colunas  $\mathbf{b}_j$  são linearmente independentes ( $\mathbf{B}$  é uma base). Consequência:  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  e portanto  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto extremo.

■  $\Rightarrow$  Suponha que  $\bar{\mathbf{x}}$  não é uma solução básica factível, ou seja, as colunas de  $\mathbf{B}$  são linearmente dependentes. Portanto, existe um vetor  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ( $u_i = 0, i = m+1, \dots, n$ ). Para um valor  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, os pontos  $\bar{\mathbf{x}} \pm \varepsilon \mathbf{u}$  são factíveis e

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}} - \varepsilon \mathbf{u})$$

Portanto,  $\bar{\mathbf{x}}$  não é um ponto extremo.

## Degeneração e Resumo

■ Toda solução básica factível é equivalente a um ponto extremo. Contudo, pode existir mais de uma base correspondendo à mesma solução básica factível (ou ponto extremo). Isso pode acontecer na presença de degeneração, como ilustrado em um exemplo anterior.

■ Seja o PL

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

### Teorema 2

*A coleção de pontos extremos corresponde à coleção de soluções básicas factíveis, e ambas são não vazias se a região factível não for vazia.*

### Teorema 3

*Assuma que a região factível não é vazia. Então uma solução ótima existe se, e somente se,  $\mathbf{c}^T \mathbf{d}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, \ell$  sendo  $\mathbf{d}_i$  as direções extremas da região factível. Caso contrário a solução ótima é ilimitada.*

## Continuação Do Resumo

### Teorema 4

*Se existe uma solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo (ou equivalentemente, uma solução básica factível).*

### Teorema 5

*Para todo ponto extremo (solução básica factível) há uma base correspondente (não necessariamente única) e, em contrapartida, para toda base existe um ponto extremo (único) correspondente. Além disso, se um ponto extremo possui mais de uma base que o representa, então ele é degenerado.*

## Resolvendo um PL por força bruta

- O número de soluções básicas factíveis é limitada pela quantidade

$$\binom{n}{m}$$

e portanto uma estratégia para resolver o problema de programação linear seria testar a função objetivo para todas as soluções básicas factíveis e encontrar a de menor valor.

- Essa estratégia é inadequada por três razões principais: (1) O número de soluções pode ser muito grande, mesmo para valores moderados de  $n$  e  $m$ ; (2) Essa abordagem não indica se a solução é ilimitada; (3) Se a região factível é vazia, esse fato só será descoberto após testar-se todas as bases possíveis.
- Alternativa: **método Simplex**.

# Otimidade Por Meio De Informações Locais I

- A propriedade que torna o método simplex atraente é a detecção de otimalidade de um certo ponto extremo utilizando apenas considerações **locais**. Isto é, não é necessário listar todos os pontos extremos (ou soluções básicas factíveis).
- Seja o PL (1), com  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rank  $m$ , e uma solução básica factível associada  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T]^T = [(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})^T, 0]^T$  que fornece o objetivo  $z_0$  dado por

$$z_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

A factibilidade de  $\mathbf{x}$  requer que  $\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N$ . Aplicando algumas manipulações, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in J} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \\ &= \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j x_j \end{aligned}$$

## Otimidade Por Meio De Informações Locais II

sendo  $J$  o conjunto com os índices das variáveis não básicas. Utilizando as equações anteriores, o valor da função objetivo  $z$  pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T \left( \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in J} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \end{aligned}$$

com  $z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$  para cada variável não básica.

■ Utilizando essas transformações, o PL (1) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & z = z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \\ \text{s. a} \quad & \sum_{j \in J} (\mathbf{y}_j) x_j + \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \\ & \mathbf{x}_B \geq 0, x_j \geq 0, j \in J \end{aligned} \tag{3}$$

## Otimidade Por Meio De Informações Locais III

Esta representação, em que a função objetivo  $z$  e as variáveis básicas  $\mathbf{x}_B$  foram resolvidas em termos das variáveis não básicas, é conhecida como representação de uma solução básica na **forma canônica**.

Percebendo que  $\mathbf{x}_B$  pode ser interpretado como um vetor de **variáveis de folga**, o PL (3) pode ser reescrito no espaço das variáveis não básicas, como segue

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j)x_j \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{j \in J} (\mathbf{y}_j)x_j \leq \bar{\mathbf{b}} \\
 & x_j \geq 0, j \in J
 \end{aligned} \tag{4}$$

Os valores  $(z_j - c_j)$  são chamados de **coeficientes de custos reduzidos**. O próximo teorema apresenta um resultado importante para a construção do método simplex.

# Condição de Otimalidade

## Teorema 6

Se  $(z_j - c_j) \leq 0$  para todo  $j \in J$ , então a solução básica factível atual é *ótima*.

Note que uma vez que  $(z_j - c_j) \leq 0$  para todo  $j \in J$ , então  $z \geq z_0$  para qualquer solução factível (note que para a solução corrente,  $z = z_0$  pois  $x_j = 0, j \in J$ ).

# Motivação Geométrica do Método Simplex I

- Note que no PL (4) a região factível é definida pela interseção de  $n$  semi-espacos ( $m$  associados às desigualdades  $\leq$  e  $p = n - m$  associados às desigualdades  $\geq$ ). Como comentado anteriormente, a cada semi-espaco há uma variável associada, que assume valor nulo na fronteira (em cima do hiperplano) e valor não negativo dentro do semi-espaco. Nas desigualdades de  $\leq$  do PL (4) as variáveis associadas são justamente as variáveis básicas  $\mathbf{x}_B$  e nas restrições de não negatividade as variáveis associadas são elas mesmas  $x_j, j \in J$ .
- A Figura 5 ilustra um problema de programação linear com os seguintes dados:  $n = 6, m = 4, p = 2, J = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{x}_B = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ .
- As variáveis associadas aos hiperplanos são apresentadas ( $x_i = 0$ ) e  $\bar{c}$  é o vetor de custos reduzidos. A solução básica factível corrente corresponde ao vértice  $v_1$ . Todos os outros pontos extremos são definidos pela interseção de  $p = 2$  hiperplanos linearmente independentes, com as  $p$  variáveis associadas sendo as variáveis não básicas. Note que  $v_3$  é definido por três hiperplanos, portanto é degenerado (pode ser representado por três bases).

## Motivação Geométrica do Método Simplex II

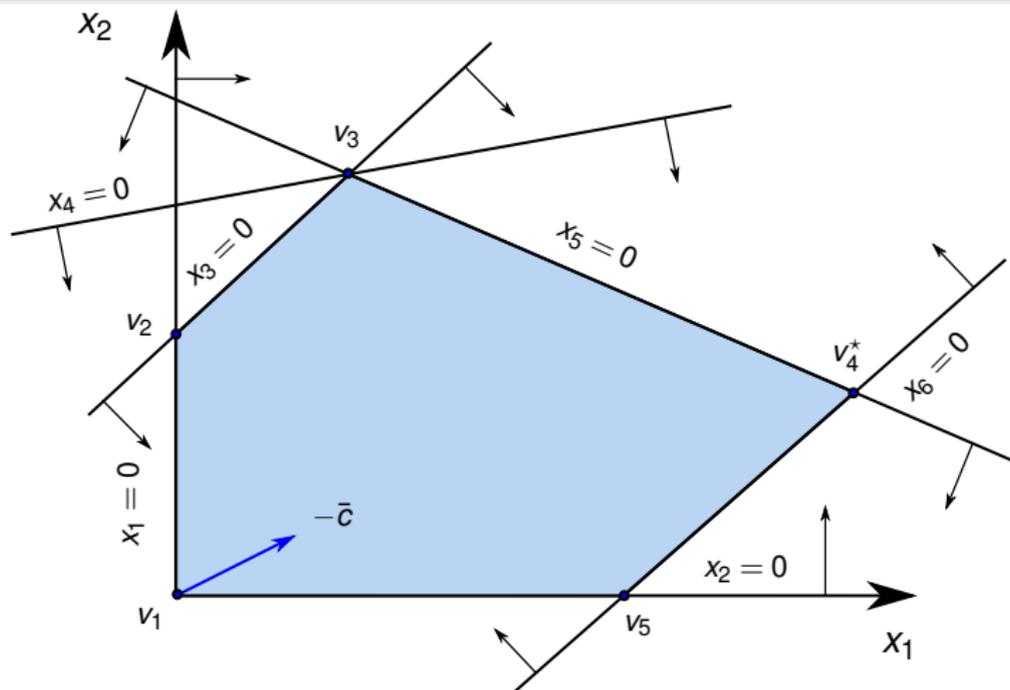


Figura 5: Motivação Geométrica.

## Motivação Geométrica do Método Simplex

- Partindo de  $v_1$  e fazendo uma avaliação sobre como a função objetivo pode melhorar (analisando  $\bar{c}$ ), percebe-se que aumentar  $x_1$  ou  $x_2$  é vantajoso. Escolhendo aumentar  $x_2$ , é possível caminhar até o vértice  $v_2$  (caso contrário  $x_3$  se tornaria negativo). Nesse momento  $x_2$  entra da base e  $x_3$  sai na base (torna-se nulo). Análises similares conduzirão ao vértice  $v_4$ , solução ótima do problema.
- Observação: em  $v_3$  é possível que haja uma troca de base e permaneça-se no mesmo ponto (valor da função objetivo não muda), devido à degeneração. Pode ocorrer o problema de ciclagem e mais adiante será discutido como evitar esse problema.
- A sequência de vértices percorridos seria diferente se na primeira iteração  $x_1$  fosse aumentado (entrando na base). O caminho percorrido é chamado de *caminho simplex*.
- Na implementação algébrica do método simplex, em cada iteração o PL é representado no espaço das variáveis não básicas. Assim, a origem nesse espaço é avaliada se é ótima ou se ainda é possível melhorar a função objetivo aumentando o valor de uma das variáveis não básicas. Nesse caso consulta-se os coeficientes dos custos reduzidos.

# Origem do Termo Simplex I

- Um  $n$ -simplex (ou simplex de dimensão  $n$ ) é a casca convexa de  $n + 1$  pontos não coplanares no  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo, para  $n = 0$  tem-se um ponto;  $n = 1$  tem-se uma reta;  $n = 2$  um triângulo e  $n = 3$  um tetraedro, conforme ilustra a Figura 6. Ele tem esse nome por representar o politopo (poliedro fechado) **mais simples** em uma dada dimensão. Por exemplo, para  $n = 2$  tem-se o triângulo, que é o polígono que possui menos vértices e arestas. Para  $n = 3$ , tem-se o tetraedro, que possui o menor número de vértices, arestas e faces.

## Origem do Termo Simplex II

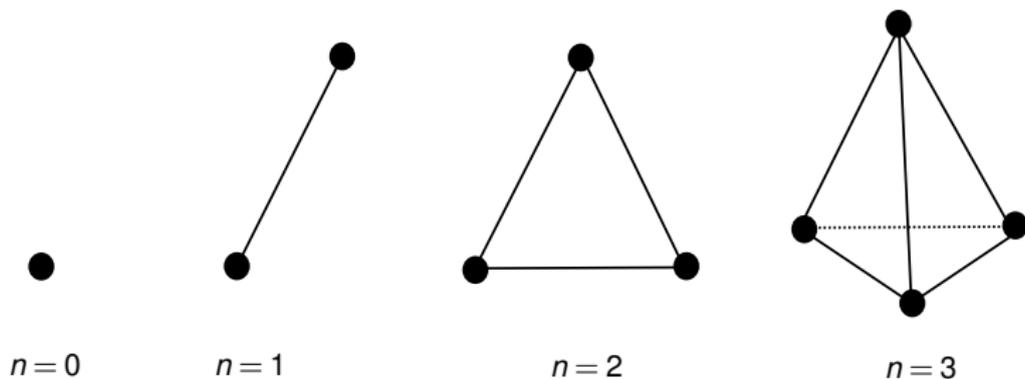


Figura 6:  $n$ -simplex de dimensão  $n \in 0, 1, 2, 3$ .

- Considere um ponto extremo (solução básica factível). Na representação no espaço das variáveis não básicas, esse ponto é a origem. Tomando esse vértice e outros  $n$  pontos nas direções dos eixos, define-se um simplex. Portanto, o método simplex avalia se o vértice atual (origem) é ótimo ou se outro vértice do simplex pode fornecer um valor melhor para a função objetivo.

# Teste de Bloqueio I

■ Como visto anteriormente, se  $(z_j - c_j) \leq 0$  para todo  $j \in J$ , então  $x_j = 0$ ,  $j \in J$  e  $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$  é a solução ótima (Teorema 6). Caso contrário o método simplex tentará aumentar uma das variáveis não básicas (mantendo as outras fixas em zero), digamos  $x_k$ . Claramente, isso será vantajoso somente se  $z_k - c_k$  for positivo. Procedendo desse modo, tem-se de (3) que

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k, \quad \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k, \quad \begin{aligned} z_k &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_k \\ &= \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ik} \end{aligned}$$

Se  $y_{ij} \leq 0$ , então  $x_{B_i}$  aumenta à medida que  $x_k$  aumenta, e portanto  $x_{B_i}$  continua factível (não negativo). Por outro lado,  $y_{ij} > 0$ , então  $x_{B_i}$  diminui à medida que  $x_k$  aumenta. Para não perder a factibilidade,  $x_k$  só pode aumentar até que uma das variáveis  $x_{B_i}$  chegue em zero. Mais precisamente, o máximo valor que  $x_k$  pode assumir é

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

# Teste de Bloqueio II

Na ausência de degeneração ( $\bar{b}_r > 0$ ), tem-se que  $x_k = \bar{b}_r / y_{rk} > 0$  e a função objetivo irá melhorar. À medida que  $x_k$  vai de zero a  $\bar{b}_r / y_{rk}$ , uma nova solução factível é obtida, com os seguintes valores

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{b}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_k = \bar{b}_r / y_{rk} \quad (5)$$

e todas as outras variáveis não básicas  $x_j$  são mantidas em zero.

- As colunas em  $\mathbf{A}$  correspondentes às variáveis positivas em (5) são  $\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, \dots, \mathbf{a}_{B_{r-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{B_{r+1}}, \dots, \mathbf{a}_{B_m}$ , que são LI se, e somente se,  $y_{rk} \neq 0$  (ver [BJS10, pág. 50]). Portanto, a nova solução dada por (5) é uma solução básica factível.

## Exemplo I

- Considere o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga  $x_3$  e  $x_4$  para deixar o problema na forma padrão, a matriz  $\mathbf{A}$  é dada por

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escolhendo  $\mathbf{x}_B = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$  (e portanto  $\mathbf{x}_N = [\mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4]$ ), o problema pode ser representado no espaço das variáveis não básicas inicialmente calculando:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = [1 \quad -1], \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_0 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = 3,$$

## Exemplo II

$$z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3 = 1, \quad z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_4 - c_4 = -1$$

levando a

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3 - x_3 + x_4 \\ \text{s.a} \quad & x_3 - 2x_4 + x_1 = 2 \\ & x_4 + x_2 = 1 \\ & x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

A Figura 7 mostra a região factível do problema tanto no espaço original  $x_1 \times x_2$  quanto no espaço atual  $x_3 \times x_4$ . Como  $z_3 - c_3 > 0$ , é vantajoso aumentar  $x_3$ . A solução modificada é:

## Exemplo III

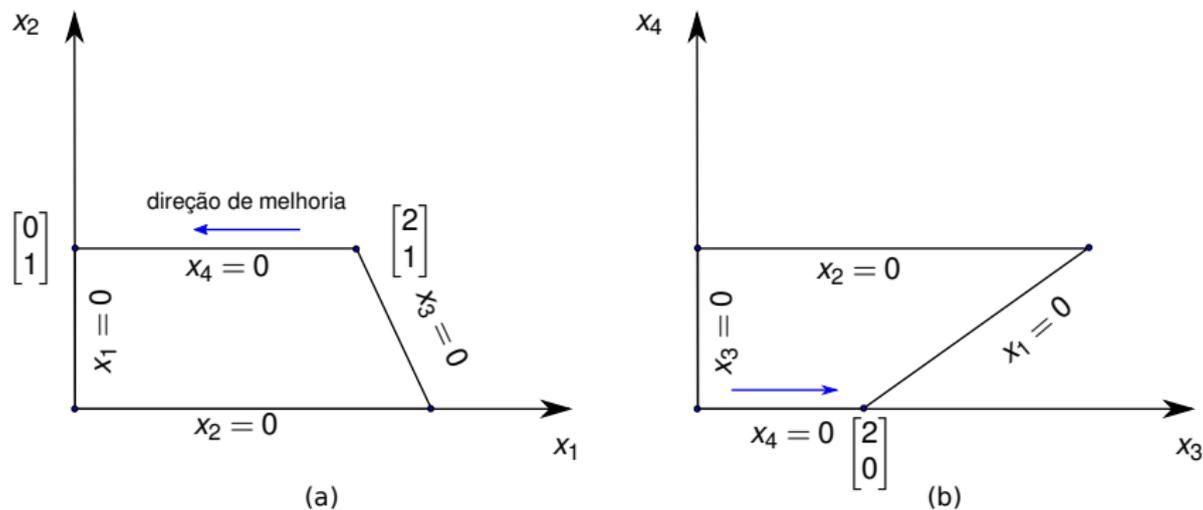


Figura 7: Melhorando uma solução básica factível.

## Exemplo IV

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3x_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

O maior valor possível para  $x_3$  é 2, portanto a nova solução básica factível é  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [0, 1, 2, 0]^T$ . Assim  $x_3$  entra na base e  $x_1$  sai, levando a função objetivo ao valor 1 (melhor que anterior).

## Descrição Resumida

- O material apresentado até esse ponto permite a seguinte descrição resumida do método Simplex: dada uma solução básica factível e uma base correspondente, a solução pode ser melhorada se  $z_k - c_k > 0$  para alguma variável não básica  $x_k$  ou o procedimento pode ser encerrado se  $z_k - c_k \leq 0$  para todas as variáveis não básicas, declarando a solução atual como ótima. Se  $z_k - c_k > 0$  e o vetor  $\mathbf{y}_k$  contém pelo menos uma componente positiva, então realiza-se a troca de base normalmente. Caso contrário, se  $\mathbf{y}_k \leq 0$ , então o problema tem solução ilimitada ( $-\infty$ ).

---

**Algorithm 1 Simplex;** entradas: solução básica factível  $\mathbf{B}$ ,  $it_{max}$ ;

---

- 1:  $it \leftarrow 1$ ;
- 2: **enquanto**  $it \leq it_{max}$  **faça**
- 3:   Seja  $x_j = 0, j \in J$ . Resolva  $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ , obtendo  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{b}}$  e  $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$ .
- 4:   Resolva o sistema  $\mathbf{w}\mathbf{B} = \mathbf{c}^T$ .
- 5:   Calcule  $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j, j \in J$  e considere  $z_k - c_k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$ ;
- 6:   **se**  $z_k - c_k \leq 0$  **então**
- 7:     a solução atual é ótima, abandone;
- 8:   **fim se**
- 9:   Resolva o sistema  $\mathbf{B}\mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$ ;
- 10:   **se**  $y_k \leq 0$  **então**
- 11:     o problema tem solução ilimitada, abandone;
- 12:   **fim se**
- 13:   Calcule o índice  $r$  da variável de bloqueio básica utilizando:

$$\bar{b}_r / y_{rk} = \min_{1 \leq i \leq m} (\bar{b}_i / y_{ik} : y_{ik} > 0)$$

- 14:   Atualize  $\mathbf{B}$ , trocando  $\mathbf{a}_k$  por  $\mathbf{a}_{B_r}$ , e o conjunto  $J$ ;
- 15:    $it \leftarrow it+1$ ;
- 16: **fim enquanto**

# Observações

- Mais adiante é discutido como encontrar uma solução básica factível inicial.
- O vetor  $\mathbf{w}$  calculado na linha 4 é conhecido como vetor dos **multiplicadores simplex**. A estratégia de selecionar a variável que entra na base aplicada na linha 5 é conhecida como regra de Dantzig.
- Se a solução for ilimitada, as soluções estão sobre o raio

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

sendo que  $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^{n-m}$  é um vetor de zeros com 1 na posição  $k$ .

- O teste aplicado na linha 13 é chamado de *teste da taxa mínima*.
- **Problema de maximização**: Considera-se  $\mathbf{c} = -\mathbf{c}$ . Outra alternativa é manter a função objetivo original e trocar o teste da linha 5 por  $z_k - c_k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\}$ . O critério de parada para a otimalidade é  $z_k - c_k \geq 0$ . Os outros passos são os mesmos.

## Teorema 7

*Na ausência de degeneração e assumindo factibilidade, o método Simplex termina em um número finito de iterações, ou com uma solução básica factível ótima, ou com a conclusão de que a função objetivo é ilimitada.*

- Três situações podem acontecer durante uma iteração: (a) uma solução ótima foi encontrada; (b) solução ilimitada foi detectada; (c) uma nova solução básica factível é gerada (se  $z_k - c_k > 0$  e  $\mathbf{y}_k \not\leq 0$ ). Na ausência de degeneração,  $\bar{b}_r > 0$  e portanto  $x_k = \bar{b}_r / y_{rk} > 0$ . Assim, o valor da função objetivo será acrescido de  $x_k(z_k - c_k) > 0$ , decrescendo estritamente, o que indica uma nova solução básica factível distinta. Como o número de soluções básicas factíveis é finito, o método para em um número finito de iterações, seja com uma solução ótima, seja com a declaração de problema ilimitado.
- Na presença de degeneração, o método pode entrar em ciclo infinito. O tratamento dessa situação é apresentado mais adiante.

PL representado por um *Tableau* I

- Um PL na forma padrão e com um solução básica factível inicial com base  $\mathbf{B}$  pode ser representado na forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 \text{s.a} \quad & z - \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = 0 \\
 & \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{N} \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Por meio de algumas manipulações, chega-se a

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}, \quad z + 0 \mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T) \mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

Na iteração corrente,  $\mathbf{x}_N = 0$  e portanto tem-se  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$  e  $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ . Utilizando essas manipulações, o PL pode ser representado pelo *tableau* apresentado a seguir (LD significa lado direito)

	$z$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$LD$	
$z$	1	0	$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T$	$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	linha 0
$\mathbf{x}_B$	0	$\mathbf{I}_m$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	linhas 1, ..., $m$

Comentários sobre o *tableau* I

- Nesta representação  $z$  é considerada como um variável básica a ser minimizada. A linha do objetivo é considerada a linha 0. A coluna LD indica o valor das variáveis básicas (linhas  $1, \dots, m$ ) e da função objetivo (linha 0). Esse *tableau*, em que as variáveis  $z$  e  $\mathbf{x}_B$  foram resolvidas em função de  $\mathbf{x}_N$ , é dito estar na *forma canônica*.
- Além do valor de  $z$  e das variáveis básicas, o *tableau* fornece informações para continuarmos com a execução do método Simplex. De fato, a primeira linha fornece  $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T$ , que consiste nos valores  $z_k - c_k$  associados às variáveis não básicas.
- Se alguma variável não básica  $x_k$  é aumentada, então o vetor  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k$ , que está em alguma coluna abaixo de  $\mathbf{x}_N$ , ajuda a determinar o quanto  $x_k$  pode ser aumentado. Se algum  $\mathbf{y}_k$  é positivo, o teste de bloqueio pode ser feito a partir de  $\mathbf{y}_k$  e  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ .

# Operação de Pivotamento I

- De iteração para iteração, é necessário realizar as seguintes ações:
  - Atualizar as variáveis básicas e seus valores;
  - Atualizar os valores  $z_k - c_k$  das novas variáveis não básicas;
  - Atualizar as colunas  $y_j$ ;

Todas essas tarefas podem ser realizadas por uma operação de **pivotamento**. Se  $x_k$  entra e  $x_{B_r}$  sai da base, então o pivotamento sobre  $y_{rk}$  é feito da seguinte forma:

- 1 Divida a linha  $r$  por  $y_{rk}$ ;
- 2 Para  $i = 1, \dots, m$  e  $i \neq r$  atualize a linha  $i$  adicionando a ela  $-y_{ik}$  vezes a nova linha  $r$ ;
- 3 Atualize a linha zero adicionando a ela  $c_k - z_k$  vezes a nova linha  $r$ .

# Operação de Pivotamento II

■ O tableau mostrado a seguir ilustra uma situação antes da aplicação do pivotamento. As variáveis  $x_k$  e  $x_{B_r}$  vão entrar e sair da base, respectivamente.

	Z	$x_{B_1}$	$x_{B_r}$	$x_{B_m}$	$x_j$	$x_k$	LD
Z	1	0	...	0	...	0	$\dots$ $z_j - c_j$ $\dots$ $z_k - c_k$ $\dots$ $\mathbf{c_B^T \bar{b}}$
$x_{B_1}$	0	1	...	0	...	0	$\dots$ $y_{1j}$ $\dots$ $y_{1k}$ $\dots$ $\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_r}$	0	0	...	1	...	0	$\dots$ $y_{rj}$ $\dots$ $(y_{rk})$ $\dots$ $\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_m}$	0	0	...	0	...	1	$\dots$ $y_{mj}$ $\dots$ $y_{mk}$ $\dots$ $\bar{b}_m$

## Operação de Pivotamento III

- O próximo tableau mostra o resultado do pivotamento.

	z	$x_{B_1}$	$x_{B_r}$	$x_{B_m}$	$x_j$	$x_k$	LD
z	1	0	$\dots \frac{c_k - z_k}{y_{rk}}$	$\dots 0$	$\dots \frac{z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)}{y_{rk}}$	$\dots 0 \dots$	$\mathbf{c}_B^T \bar{\mathbf{b}} - (z_k - c_k) \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$x_{B_1}$	0	1	$\dots -\frac{y_{1k}}{y_{rk}}$	$\dots 0$	$\dots y_{1j} - y_{1k} \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\dots 0 \dots$	$\bar{b}_1 - \bar{b}_r \frac{y_{1k}}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_r}$	0	0	$\dots \frac{1}{y_{rk}}$	$\dots 0$	$\dots \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\dots 1 \dots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_m}$	0	0	$\dots -\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	$\dots 1$	$\dots y_{mj} - y_{mk} \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\dots 0 \dots$	$\bar{b}_m - \bar{b}_r \frac{y_{mk}}{y_{rk}}$

## Exemplo I

## ■ Exemplo:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = x_1 + x_2 - 4x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3
 \end{aligned}$$

Introduzindo variáveis de folga para colocar o PL na forma padrão, tem-se

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = x_1 + x_2 - 4x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6
 \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{b} \geq 0$ , identifica-se  $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6]$  como uma base inicial factível, pois  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$ .

## Exemplo II

- Para construir o *tableau*, note que a linha 0 é dada por

$$z \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z & \mathbf{x}_B & \mathbf{x}_N & LD \\ \hline 1 & 0 & \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T & \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \hline \end{array} \quad \text{linha 0}$$

Nesse exemplo em particular, os coeficientes  $\mathbf{c}_B$  são todos nulos e os coeficientes associados às variáveis não básicas ( $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T$ ) são simplesmente  $-\mathbf{c}_N^T$ . Assim, constrói-se o *tableau* na forma canônica de forma imediata. Caso  $\mathbf{c}_B \neq 0$ , pivotamentos são necessários para colocar o *tableau* na forma canônica (ver próximo exemplo).

A seqüência de *tableaus* até a convergência para o ótimo é apresentada a seguir.

**Iteração 1**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	-1	-1	4	0	0	0	0
$x_4$	1	1	2	1	0	0	9
$x_5$	1	1	-1	0	1	0	2
$\leftarrow x_6$	-1	1	1	0	0	1	4

## Exemplo III

## Iteração 2

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	3	-5	0	0	0	-4	-16
$\leftarrow x_4$	3	-1	0	1	0	-2	1
$x_5$	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	-1	1	1	0	0	1	4

## Iteração 3 - Ótimo encontrado!

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	0	-4	0	-1	0	-2	-17
$x_1$	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
$x_5$	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

## Exemplo I

- Considere o PL do exemplo anterior na forma padrão.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = x_1 + x_2 - 4x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6
 \end{aligned}$$

Como a matriz

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem rank completo ( $\det(\mathbf{B}) = 6$ ), e  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = [4/3, 3, 7/3]$ , ela pode ser utilizada como uma base factível inicial. Nesse caso, tem-se o seguinte *tableau* (ainda não na forma canônica)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	-1	-1	4	0	0	0	0
$x_1$	1	1	2	1	0	0	9
$x_2$	1	1	-1	0	1	0	2
$x_3$	-1	1	1	0	0	1	4

## Exemplo II

Note que os coeficientes dos custos na linha  $z$  no *tableau* estão com os **sinais contrários** da linha  $z$  da função objetivo do problema, conforme a representação (6).

Para colocar esse *tableau* na forma canônica, é necessário transformar as colunas associadas às variáveis básicas nas colunas da matriz identidade, isto é,

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso, é necessário que os coeficientes associados às variáveis básicas fiquem nulos na linha  $z$ . As duas tarefas podem ser realizadas por operações de pivotamento, levando ao *tableau* mostrado na iteração 1, que está na forma canônica. Na sequência apresenta-se os *tableau* produzidos pelo método Simplex até a solução ótima.

## Exemplo III

## Iteração 1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	0	0	0	-1	2	0	-5
$x_1$	1	0	0	1/3	1/6	-1/2	4/3
$\leftarrow x_2$	0	1	0	0	1/2	1/2	3
$x_3$	0	0	1	1/3	-1/3	0	7/3

## Iteração 2 - Ótimo encontrado!

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	0	-4	0	-1	0	-2	-17
$x_1$	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
$x_5$	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

Interpretação dos Elementos do *Tableau* I

- Considere o *tableau* apresentado a seguir em um caso não degenerado

	$z$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$LD$
$z$	1	0	$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T$	$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
$\mathbf{x}_B$	0	$\mathbf{I}_m$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

O *tableau* pode ser entendido como uma representação das variáveis básicas  $\mathbf{x}_B$  e do custo  $z$  (variáveis dependentes) em termos das variáveis não básicas  $\mathbf{x}_N$  (variáveis independentes). Da linha do custo, tem-se

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T) \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j \end{aligned}$$

Assim a taxa de variação de  $z$  como função de qualquer variável não básica  $x_j$ , denotada por  $\partial z / \partial x_j$ , é simplesmente  $c_j - z_j$ . Portanto, se o objetivo é minimizar  $z$ , deve-se aumentar  $x_j$  se  $\partial z / \partial x_j < 0$ , isto é,  $z_j - c_j > 0$  (custo reduzido positivo).

Interpretação dos Elementos do *Tableau* II

- Também é possível representar as variáveis básicas em termos das não básicas como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in J} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j) x_j \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j x_j \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\partial \mathbf{x}_B / \partial x_j = -\mathbf{y}_j$ , isto é,  $\mathbf{y}_j$  é a taxa de variação das variáveis básicas em função da variável não básica  $x_j$ . Em outros termos, se  $x_j$  aumenta em uma unidade, então a  $i$ -ésima variável básica  $x_{B_i}$  decresce de uma quantidade dada por  $y_{ij}$  ou simplesmente  $\partial x_{B_i} / \partial x_j = -y_{ij}$ .

- O *tableau* também fornece uma maneira interessante de prever a taxa de variação da função objetivo e do valor das variáveis básicas como uma função do vetor do lado direito  $\mathbf{b}$ . Como em geral o vetor  $\mathbf{b}$  representa recursos limitados, é

Interpretação dos Elementos do *Tableau* III

possível prever a taxa de variação da função objetivo à medida que a disponibilidade de recursos é modificada, em particular

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$$

e portanto,  $\partial z / \partial \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ . Caso o *tableau* original tenha as colunas da matriz identidade e custos nulos associados, por exemplo, e quando o problema tem restrições de  $\leq$  e variáveis de folga são introduzidas, então no *tableau* final a linha do custo nas posições das variáveis de folga terá  $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} - 0 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ , que é  $\partial z / \partial \mathbf{b}$ . Adotando a notação  $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ , então  $\partial z / \partial b_i = w_i$ . Na aula sobre dualidade  $w_i$  será interpretada como variável dual, também chamada de preço sombra (do inglês, *shadow price*).

De modo similar, a taxa de variação das variáveis básicas em função do vetor  $\mathbf{b}$  é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{x}_B}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}$$

Interpretação dos Elementos do *Tableau* IV

Em particular,  $\partial \mathbf{x}_{B_i} / \partial \mathbf{b}$  é a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\partial \mathbf{x}_B / \partial b_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{B}^{-1}$  e  $\partial \mathbf{x}_{B_i} / \partial b_j$  é o elemento  $(i, j)$  da matriz  $\mathbf{B}^{-1}$ .

## Exemplo

Identifique as taxas de variações definidas anteriormente para o *tableau* apresentado a seguir ( $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$  são variáveis de folga)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$LD$
$z$	3	-5	0	0	0	-4	-16
$x_4$	3	-1	0	1	0	-2	1
$x_5$	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	-1	1	1	0	0	1	4

Interpretação dos Elementos do *Tableau V*

As seguintes interpretações são possíveis

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_6} = 4,$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -3,$$

$$\frac{\partial x_5}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_6} = -1$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_B}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial z}{\partial b_1} = \frac{\partial z}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b_3} = -4, \quad \frac{\partial x_5}{\partial b_2} = 1, \quad \frac{\partial x_4}{\partial b_3} = -2$$

e

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Referências Bibliográficas



M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali.

*Linear Programming and Network Flows.*

Jonh Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 4 edition, 2010.