IA881 – Manual de soluções das listas de exercícios

Última atualização: 25 de março de 2023

Este documento apresenta soluções alguns exercícios das listas

- Lista Formulação
- Lista Álgebra Linear
- Lista Simplex
- Lista Simplex Revisado
- Lista Dualidade
- Lista Simplex com variáveis canalizadas
- Lista Análise de Sensibilidade

associadas ao curso IA881 - Otimização Linear, da FEEC-UNICAMP, disponibilizado pelos professores Akebo Yamakami, Takaaki Ohishi e Ricardo Oliveira.

Nota: as soluções apresentadas foram propostas pelos alunos do curso e não há garantias que estão corretas. Erros podem ser reportados no email `ricfow@dt.fee.unicamp.br`

Lista – Formulação (FML)

FML.1 (data: 15.04.2017)

As variáveis de decisão são:

- X_A - Quantidade de chapas metálicas do tipo A;
- X_B - Quantidade de chapas metálicas do tipo B;
- X_C - Quantidade de chapas metálicas do tipo C;

Modelo formulado:

$$\begin{cases} \max & Z = 5X_A + 7X_B + 8X_C \\ & X_A + X_B + 2X_C \leq 2000 \\ s.a & 3X_A + 4,5X_B + X_C \leq 8000 \\ & X_A, X_B, X_C \geq 0 \end{cases}$$

FML.2 (data: 15.04.2017)

Sejam as variáveis de decisão:

- x_1 - número de aviões B727 operando a rota SP-RJ;
- x_2 - número de aviões B727 operando a rota SP-PA;
- x_3 - número de aviões Electra operando a rota SP-RJ;
- x_4 - número de aviões Electra operando a rota SP-PA;
- x_5 - número de aviões Bandeirante operando a rota SP-RJ;
- x_6 - número de aviões Bandeirante operando a rota SP-PA;

que são ilustradas na Figura 1. Para que a operação tenha seus custos de operação minimizados, propões a seguinte função objetivo

$$\min 23x_1 + 58x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 1,4x_5 + 3,8x_6$$

Visando garantir que toda a carga será enviada, propõem-se as restrições (não estaria errado usar restrições do tipo $\geq$)

$$45x_1 + 7x_3 + 4x_5 = 150, \quad 45x_2 + 7x_4 + 4x_6 = 100$$

Com relação aos números máximos de aeronaves disponíveis para realizar o transporte, as seguintes restrições são propostas

$$x_1 + x_2 \leq 8, \quad x_3 + x_4 \leq 15, \quad x_5 + x_5 \leq 12$$

Finalmente, na forma padrão tem-se o seguinte PL:

$$\begin{array}{llllllllllll} \min & z = 23x_1 + 58x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 1,4x_5 + 3,8x_6 \\ \text{s. a} & 45x_1 & & +7x_3 & & +4x_5 & & & & & = & 150 \\ & & 45x_2 & & +7x_4 & & +4x_6 & & & & = & 100 \\ & x_1 + & x_2 & & & & & +x_7 & & & = & 8 \\ & & & x_3 + & x_4 & & & & +x_8 & & = & 15 \\ & & & & & x_5 + & x_6 & & & +x_9 & = & 12 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 9 \end{array}$$

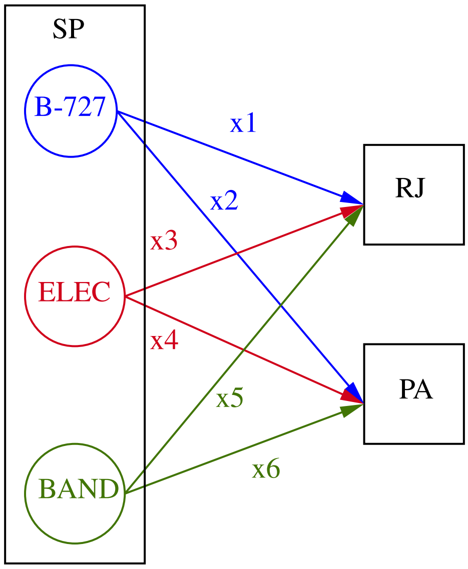


Figura 1: Variáveis de decisão associadas às rotas SP-RJ e SP-PA em função das aeronaves B-727, Bandeirante e Electra.

FML.3 (data: 15.04.2017)

As variáveis de decisão x_i, $i = 1, \ldots, 8$ são os valores a serem investidos nos oito projetos das três subsidiárias.

Como função objetivo, deseja-se maximizar o investimento nos projetos. Usando as informações da tabela, propõe-se a função

$$\max 0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,09x_3 + 0,07x_4 + 0,10x_5 + 0,04x_6 + 0,06x_7 + 0,03x_8$$

As seguintes restrições garantem os investimentos mínimos exigidos

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \quad x_4 + x_5 + x_6 \geq 5, \quad x_7 + x_8 \geq 8$$

Para garantir que o investimento máximo não ultrapasse \$30, tem-se

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 30$$

O limite de investimento na subsidiária II pode ser garantido por meio da restrição

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 17$$

Para estabelecer um teto de investimento para cada projeto, tem-se

$$\begin{array}{cccc} x_1 \leq 6, & x_2 \leq 5, & x_3 \leq 9, & x_4 \leq 7, \\ x_5 \leq 10, & x_6 \leq 4, & x_7 \leq 6, & x_8 \leq 3 \end{array}$$

Finalmente, tem-se o PL

$$
\begin{array}{rl}
\max & z = 0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,09x_3 + 0,07x_4 + 0,1x_5 + 0,04x_6 + 0,06x_7 + 0,03x_8 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\
& x_4 + x_5 + x_6 \geq 5 \\
& x_7 + x_8 \geq 8 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 30 \\
& x_4 + x_5 + x_6 \leq 17 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_2 \leq 5 \\
& x_3 \leq 9 \\
& x_4 \leq 7 \\
& x_5 \leq 10 \\
& x_6 \leq 4 \\
& x_7 \leq 6 \\
& x_8 \leq 3 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 8
\end{array}
$$

FML.4 (06.03.2020)

x_1 – nº de galões para Congonhas da Cia. 1
x_2 – nº de galões para Viracopos da Cia. 1
x_3 – nº de galões para Galeão da Cia. 1
x_4 – nº de galões para Pampulha da Cia. 1
x_5 – nº de galões para Congonhas da Cia. 2
x_6 – nº de galões para Viracopos da Cia. 2
x_7 – nº de galões para Galeão da Cia. 2
x_8 – nº de galões para Pampulha da Cia. 2
x_9 – nº de galões para Congonhas da Cia. 3
x_{10} – nº de galões para Viracopos da Cia. 3
x_{11} – nº de galões para Galeão da Cia. 3
x_{12} – nº de galões para Pampulha da Cia. 3

min $12x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 11x_4 + 9x_5 + 11x_6 + 11x_7 + 13x_8 + 10x_9 + 14x_{10} + 13x_{11} + 9x_{12}$

s.a. $x_1 + x_5 + x_9 \geq 100000$
$x_2 + x_6 + x_{10} \geq 200000$
$x_3 + x_7 + x_{11} \geq 300000$
$x_4 + x_8 + x_{12} \geq 400000$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 250000$
$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 500000$
$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 600000$

$x_i \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,12$

FML 5 (data: 08.04.2021)

Como variáveis de decisão, definem-se as produções de barris por dia de gás (x_1), gasolina (x_2), querosene (x_3), diesel (x_4), óleo pesado (x_5) e óleo leve (x_6). Além disso, definem-se como x_7, x_8 e x_9 as quantidades de barris de petróleo comprados do Kuwait, Arábia Saudita e Líbia, respectivamente.

Em termos de função objetivo, considera-se a maximização do lucro, isto é, a diferença entra a receita obtida com a venda dos produtos e a despesa gerada pela compra dos barris de petróleo. Portanto,

$$\max 2,1x_1 + 3,5x_2 + 3,3x_3 + 3,1x_4 + 2,5x_5 + 2,8x_6 - 2x_7 - 2,5x_8 - 3x_9$$

Com relação aos limites de aquisição do petróleo e da capacidade máxima de processamento diária, tem-se as seguintes restrições

$$x_7 \leq 70000, \quad x_8 \leq 100000, \quad x_9 \leq 50000, \quad x_7 + x_8 + x_9 \leq 100000 \tag{1}$$

Note que a última restrição garante a segunda uma vez que as variáveis são não negativas. Em relação à produção de cada item, tem-se os seguintes limitantes em função da disponibilidade de petróleo das três localidades

$$\begin{array}{lll} x_1 \leq 0.1x_7 + 0.1x_8 + 0.1x_9 & x_2 \leq 0.1x_7 + 0.15x_8 + 0.2x_9 & x_3 + 0.1x_5 + 0.2x_6 \leq 0.1x_7 + 0.15x_8 + 0.2x_9 \\ x_4 \leq 0.1x_7 + 0.15x_8 + 0.2x_9 & 0.9x_5 + 0.8x_6 \leq 0.6x_7 + 0.45x_8 + 0.3x_9 & \end{array} \tag{2}$$

Em função das exigências impostas pelo governo, os seguintes limites de produções devem ser respeitados

$$\begin{array}{lll} 5000 \leq x_1 \leq 10000 & 13000 \leq x_2 \leq 20000 & 15000 \leq x_3 \leq 20000 \\ 10000 \leq x_4 \leq 25000 & 10000 \leq x_5 \leq 20000 & 12000 \leq x_6 \leq 20000 \end{array} \tag{3}$$

Finalmente, tem-se o PL (as restrições de não negatividade de $x_i, \; i = 1, \ldots, 6$, foram removidas pois essas variáveis são limitadas inferiormente)

$$\begin{array}{ll} \max & 2,1x_1 + 3,5x_2 + 3,3x_3 + 3,1x_4 + 2,5x_5 + 2,8x_6 - 2x_7 - 2,5x_8 - 3x_9 \\ \text{s. a} & (1), (2), (3) \\ & x_7 \geq 0, \; x_8 \geq 0, \; x_9 \geq 0 \end{array}$$

FML.6 (data: 21.05.2019)

Variáveis do problema:

y_1	Tonelada do Metal I em A	y_6	Tonelada do Metal IV em B
y_2	Tonelada do Metal II em A	x_1	Tonelada do Minéiro 1
y_3	Tonelada do Metal IV em A	x_2	Tonelada do Minéiro 2
y_4	Tonelada do Metal II em B	x_3	Tonelada do Minéiro 3
y_5	Tonelada do Metal III em B		

Em termos de função objetivo, considera-se a maximizaçao do lucro, isto é, a diferença entra a receita obtida com a venda das ligas A e B e a despesa gerada pela compra dos minérios. Portanto,

$$\max Z = 200(y_1 + y_2 + y_3) + 300(y_4 + y_5 + y_6) - (30x_1 + 40x_2 + 50x_3)$$

Note que as quantidades (em toneladas) de ligas A e B produzidas são justamente as somas das parcelas dos metais presentes nas ligas.

As especificações de composição das ligas A e B impõem as seguintes restrições

$$\begin{array}{ll} y_1 \leq 0.8(y_1 + y_2 + y_3) & y_2 \leq 0.3(y_1 + y_2 + y_3) \\ 0.5(y_1 + y_2 + y_3) \leq y_3 & 0.4(y_4 + y_5 + y_6) \leq y_4 \leq 0.6(y_4 + y_5 + y_6) \\ 0.3(y_4 + y_5 + y_6) \leq y_5 & y_6 \leq 0.7(y_4 + y_5 + y_6) \end{array} \tag{4}$$

A composição dos minérios em termos dos metais fornece as seguintes restrições para as quantidades de metais I, II, III e IV utilizadas para compor as ligas A e B:

$$\begin{array}{ll} y_1 \leq 0.2x_1 + 0.10x_2 + 0.05x_3 & y_2 + y_4 \leq 0.1x_1 + 0.20x_2 + 0.05x_3 \\ y_5 \leq 0.3x_1 + 0.30x_2 + 0.70x_3 & y_3 + y_6 \leq 0.3x_1 + 0.30x_2 + 0.20x_3 \end{array} \tag{5}$$

Finalmente em função das quantidades máximas disponíveis de minérios, tem-se

$$x_1 \leq 1000, \quad x_2 \leq 2000 \quad x_3 \leq 3000 \tag{6}$$

Formulação final:

$$\begin{array}{ll} \max & 200(y_1 + y_2 + y_3) + 300(y_4 + y_5 + y_6) - (30x_1 + 40x_2 + 50x_3) \\ \text{s. a} & (4), (5), (6) \\ & y_i \geq 0, x_j \geq 0, \ i = 1, \ldots, 6, \ j = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

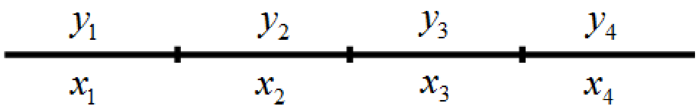
FML 7 (data: 04.04.2017)

Seja x_i a quantidade do ingrediente i na ração. Formulação:

$$\min Z = 15x_1 + 20x_2 + 8x_3$$

$$s.a \begin{cases} 0,2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 1200 \\ 0,8x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 20000 \\ 0,2x_1 + x_2 + 3x_3 & \geq & 800 \\ 50x_1 + 9x_2 & \geq & 22000 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1000 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

FML.8 (data: 10.04.2017)



x_i - quantidade produzida no mês i

y_i - quantidade estocada no mês i

min z $=18x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 27x_4 + 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 0y_4$

s.a $\quad 0 \le x_1 \le 50$

$0 \le x_2 \le 20$

$0 \le x_3 \le 30$

$0 \le x_4 \le 35$

$y_1 = x_1 - 40$

$y_2 = y_1 + x_2 - 30$

$y_3 = y_2 + x_3 - 10$

$y_4 = y_3 + x_3 - 35 = 0$

FML 9 (data: 26.03.2018)

Variáveis de decisão

qL = quantidade de leite a ser consumido
qA = quantidade de arroz a ser consumido
qF = quantidade de feijão a ser consumido
qC = quantidade de carne a ser consumida

Função objetivo

$$minz = 1200qL + 1000qA + 2500qF + 8000qC$$

Restrições

10 qL + 5 qA + 9 qF + 10 qC $\geq$ 80
8 qL + 7 qA + 6 qF + 6 qC $\geq$ 70
15 qL + 3 qA + 4 qF + 7 qC $\geq$ 100
20 qL + 2 qA + 3 qF + 9 qC $\geq$ 60

Restrições adicionais
$qL \geq 0$
$qA \geq 0$
$qF \geq 0$
$qC \geq 0$

FML 10 (data: 04.04.2017)

Seja x_{ij} a quantidade de garrafa de vinho produzida por mês na fábrica i e entregue ao distribuidor j.

Seja D_j a demanda solicitada pelo distribuidor j.

Repare que desejamos minimizar uma função do tipo:

$$Custo_{ij} * x_{ij} + (D_j - x_{ij}) * Multa_j = (Custo_{ij} - Multa_j) * x_{ij} + Multa_j * D_j$$

Observando que $Multa_j * D_j$ é um valor constante, o problema passa a ser:

$$\min Z = (Custo_{ij} - Multa_j) * x_{ij}$$

Para o fornecedor quatro, não há o que se falar em multa, pois é um requisito do problema que toda a demanda seja satisfeita. Assim, temos:

$$\min Z = (50-50)x_{11} + (10-30)x_{12} + (70-20)x_{13} + 30x_{14} + \\ +(60-50)x_{21} + (40-30)x_{22} + (60-20)x_{23} + 20x_{24}$$

O problema de PL pode ser escrito como:

$$\min Z = -20x_{12} + 50x_{13} + 30x_{14} + 10x_{21} + 10x_{22} + 40x_{23} + 20x_{24}$$

$$s.a \begin{cases} x_{11}+x_{21} & \leq & 75000 \\ x_{12}+x_{22} & \leq & 20000 \\ x_{13}+x_{23} & \leq & 30000 \\ x_{14}+x_{24} & = & 20000 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & \leq & 80000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leq & 65000 \\ x_{ij} & \geq & 0; \qquad i=1,2; \quad j=1,2,3,4 \end{cases}$$

Obs: Repare que como o lucro não está modelado na função objetivo e o termo que multiplica x_{12} é menor que zero, e com excessão da restrição de igualdade do fornecedor 4, todas são do tipo menor ou igual, poderíamos "visualizar"a função objetivo como a seguinte expressão:

$$\min Z = minZ^* = -20x_{12}+30x_{14}+20x_{24} \quad \text{(Todos os outros } x_{ij}=0\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{24}=20000 & \text{(Toda a demanda de 4 não ultrapassa a capacidade da fábrica 2 e o custo de} \\ x_{14}=0 & \text{transporte da fábrica 2 para o fornecedor 4 é menor que o equivalente da fábrica 1)} \\ x_{12}=20000 & \text{(Toda a demanda do fornecedor 2 pode ser fornecida pela fábrica 1)} \end{cases}$$

Esta solução é clara, pois em todos os outros casos, é mais barato pagar a multa do que transportar a garrafa.

FML.11 (data: 04.07.2017)

Temos um problema de minimização de custos, diretamente proporcionais à eficiência de cada estação de tratamento (x_1, x_2 e x_3 - variáveis de decisão) de maneira a se manter um nível mínimo aceitável de qualidade da água do rio. Os custos relacionados à eficiência de cada planta são C_1, C_2 e C_3. Desta maneira, a função objetivo é:

min $z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$

Subtende-se que a eficiência de cada planta é a relação entre o DOB descarregado por cada planta no rio (b_1, b_2, b_3) e o DOB descarregado por cada cidade em sua planta (a_1, a_2, a_3), diminuída de 100%.

Portanto podemos deduzir que:

$x_1 = 1-(b_1/a_1) \rightarrow x_1 - 1 = -(b_1/a_1) \rightarrow a_1(x_1-1) = -b_1 \rightarrow b_1 = a_1 - a_1x_1$

da mesma forma: $b_2 = a_2 - a_2x_2$ e $b_3 = a_3 - a_3x_3$

Através da vazão do rio em cada ramo (Q_1, Q_2 e Q_3), em litros/dia, e do máximo DOB permitido a ser descarregado em cada ramo (B_1, B_2 e B_3), em kg/litros, conseguimos determinar o limite superior de DOB que pode ser descarregado no rio por cada planta, em kg/dia:

$b_1 \leq B_1Q_1 \qquad b_2 \leq B_2Q_2 \qquad b_3 \leq B_3Q_3$

Como a atividade bioquímica do próprio rio remove parte do DOB acumulado, o valor de b_2 pode ser menor que b_1, e o de b_3 menor que b_2. As diferenças entre eles são representadas por r_{12} e r_{23}, respectivamente:

$b_2 \leq b_1 - r_{12}$ $\qquad$ $b_3 \leq b2 - r_{23}$

Além disso, temos do enunciado que a eficiência de cada planta não pode superar 95%:

$x_1 \leq 0,95$ $\qquad$ $x_2 \leq 0,95$ $\qquad$ $x_3 \leq 0,95$

Por último, temos as restrições de não negatividade:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Modelo proposto de PL

min $z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$

sujeito a:

$x1 \leq 0,95$
$x_2 \leq 0,95$
$x_3 \leq 0,95$
$b_1 \leq B_1Q_1 \rightarrow a_1 - a_1x_1 \leq B_1Q_1$
$b_2 \leq B_2Q_2 \rightarrow a_2 - a_2x_2 \leq B_2Q_2$
$b_3 \leq B_3Q_3 \rightarrow a_3 - a_3x_3 \leq B_3Q_3$
$b_2 \leq b_1 - r_{12} \rightarrow a_1 - a_2 - a_1x_1 + a_2x_2 \geq r_{12}$
$b_3 \leq b_2 - r_{23} \rightarrow a_2 - a_3 - a_2x_2 + a_3x_3 \geq r_{23}$

com $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

FML.12 (data: 02.04.2018)

$$\begin{cases} \text{max} & z = 20A + 50B \\ \text{s.a} & 2A + 4B \leq 240 \\ & A \geq (A+B).0,8 \\ & 0 \leq A \leq 100 \\ & 0 \leq B \end{cases}$$

FML.13 (data: 25.05.2019)

Sejam

x_1 : a quantidade de fundo alocados no investimento A

x_2 : a quantidade de fundo alocados no investimento B

Vamos alocar o fundo de modo a maximizar o lucro (rendimento). Dessa forma, a função objetivo será

$$\max \ z = 0,05x_1 + 0,08x_2.$$

Como o indivíduo dispõe de \$5000 para investir, temos que

$$x_1 + x_2 \leq 5000 \ \text{(disponibilidade)}.$$

Para alocar no mínimo 25% em A, fazemos

$$x_1 \geq 0,25(x_1 + x_2) = 0,25x_1 + 0,25x_2.$$

Reescrevendo, temos que

$$-0,75x_1 + 0,25x_2 \leq 0.$$

Para alocar no máximo 50% em B, fazemos

$$x_2 \leq 0,5(x_1 + x_2) = 0,5x_1 + 0,5x_2.$$

Reescrevendo, temos que

$$-0,5x_1 + 0,5x_2 \leq 0.$$

Como o investimento em A deve ser no mínimo metade do investimento em B, temoss que

$$x_1 \geq \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow -x_1 + 0,5x_2 \leq 0.$$

Dessa forma, o modelo matemático é como segue:

$$\begin{aligned} &\max \ z = 0,05x_1 + 0,08x_2 \\ &\text{s.a:} \ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5000 \\ -0,75x_1 + 0,25x_2 \leq 0 \\ -0,5x_1 + 0,5x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 0,5x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

FML.14 (data: 03.04.2018)

Sejam:
x1 = quantidade do produto de limpeza A
x2 = quantidade do produto de limpeza B

Função Objetivo: Max z = 8x1 + 10x2

s. a 0,5x1 + 0,5x2 <= 150
0,6x1 + 0,4x2 <= 145
30 =< x1 <= 150
40 =< x2 <= 200
x1 >= 0, x2 >= 0

Solução Ótima:
0,5x1 + 0,5x2 – 150 = 0 (1)
0,6x1 + 0,4x2 – 145 = 0 (2)

Multiplicando-se a equação (1) por (-1,2), teremos:
- 0,6x1 - 0,6x2 + 180 = 0 (1')
0,6x1 + 0,4x2 – 145 = 0 (2)

Somando-se as duas equações, obteremos:
- 0,2x2 + 35 = 0 $\Rightarrow$ 0,2x2 = 35 $\Rightarrow$ **<u>x2 = 175</u>**

Substituindo o valor de x2 na equação (1), encontraremos x1:
0,5x1 + 0,5.(175) – 150 = 0 $\Rightarrow$ 0,5x1 + 87,5 - 150 = 0
0,5x1 – 62,5 = 0 $\Rightarrow$ 0,5x1 = 62,5 $\Rightarrow$ **<u>x1 = 125</u>**

Portanto, **<u>Max z</u>** = ($8x125) + ($10x175) = 1000 + 1750 = **<u>$2750</u>**

Logo, as quantidades ótimas de produção serão: **<u>125</u>** unidades do **<u>produto A</u>** e **<u>175</u>** unidades do **<u>produto B</u>**, sendo **<u>z = $2750.</u>**

FML.15 (data: 04.07.2017)

Considera-se para a resolução deste problema que a mão de obra é a restrição que limita a quantidade de chapéus que pode ser fabricada em um dia.

Se fossem só fabricados chapéus do tipo 2, o limite seria de 400 chapéus por dia. Sabemos que o chapéu do tipo 1 necessita do dobro de horas, em relação ao chapéu do tipo 2, para ser produzido.

Sendo x_1 e x_2 a quantidade de chapéus produzida de cada tipo, podemos deduzir da situação acima que:

$$2x_1 + x_2 \leq 400$$

Através do enunciado do exercício sabemos o lucro de cada tipo de chapéu ($8 e $5) e seus limites de mercado (150 e 200), respectivamente. Não podemos esquecer das restrições de não negatividades. Trata-se de um problema de maximização de lucro.

Modelo proposto de PL

max $z = 8x_1 + 5x_2$

sujeito a

$2x_1 + x_2 \leq 400$
$x_1 \leq 150$
$x_2 \leq 200$

com $x_1, x_2 \geq 0$

FML.16 (data: 21.04.2017)

As variáveis de decisão são:

- x_1 - Quantidade de comerciais por rádio além do primeiro;
- x_2 - Quantidade de comerciais por TV além do primeiro;

Modelo formulado:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & Z = 5000 + 2000x_1 + 4500 + 3000x_2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & Z = 2000x_1 + 3000x_2 + 9500 \\ & 300(x_1+1) + 2000(x_2+1) \leq 20000 \\ s.a & 300(x_1+1) \leq 16000 \\ & 2000(x_2+1) \leq 16000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & Z = 2000x_1 + 3000x_2 + 9500 \\ & 300x_1 + 2000x_2 \leq 17700 \\ s.a & 300x_1 \leq 15700 \\ & 2000x_2 \leq 14000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

FML.17 (data: 25.03.2023)

As variáveis de decisão são:

- x_1 - Quantidade de camisas a serem produzidas
- x_2 - Quantidade de blusas a serem produzidas

Como função objetivo, deseja-se maximizar o lucro com as vendas dos produtos:

$$\max 8x_1 + 12x_2$$

Como restrições, é necessário limitar a produção em função do total de horas disponíveis para cada etapa da produção. Como os tempos necessários consumidos nas três etapas para cada item foram dados em minutos, as restrições ficam na forma (note que são 40 horas por semana)

$$20x_1 + 60x_2 \leq 25 \cdot 40 \cdot 60, \quad 70x_1 + 60x_2 \leq 35 \cdot 40 \cdot 60, \quad 12x_1 + 4x_2 \leq 5 \cdot 40 \cdot 60$$

Assim, tem-se o PL

$$\begin{array}{rl}
\max & z = 8x_1 + 12x_2 \\
\text{s. a} & 20x_1 + 60x_2 \leq 60000 \\
 & 70x_1 + 60x_2 \leq 84000 \\
 & 12x_1 + \ \ 4x_2 \leq 12000 \\
 & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 2
\end{array}$$

Lista – Álgebra Linear (AL)

AL.1 (data: 24.05.2019)

$$(A^I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 20 & 2 \end{bmatrix}$$

Por operações elementares encontramos $(A^I)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 20 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. $L_1 \leftarrow \dfrac{L_1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 20 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 20 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $L_2 \leftarrow \dfrac{L_2}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 20 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $L_3 \leftarrow L_3 - 20L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 7 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{50}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{50} & \frac{1}{5} & \frac{1}{50} \end{bmatrix}$$

7. $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{50} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{50} \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{50} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{50} \end{bmatrix}$$

8. $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{50} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{50} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{50} & \frac{1}{5} & \frac{1}{50} \end{array}\right]$$

$$(A^I)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{11}{50} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{50} \\ -\frac{4}{50} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ \frac{7}{50} & \frac{1}{5} & \frac{1}{50} \end{array}\right]$$

AL.02 (data: 03.04.2018)

1) Modelando o problema

		Chapas			Disponibilidade
	Chapas	**A**	**B**	**C**	**minutos/mês**
FO	Lucro	5	7	8	
R1	Prensa	1	1	2	2.000
R2	Esmalte	3	4,5	1	8.000

2) Aplicado a produção proposta nas restrições R1 e R2 modelada

	A	C	C	
FO	100	1650	125	
R1	100	1650	250	2.000
R2	300	7425	125	7.850

Restrição R1 chegou no limite 2.000, portanto OK

Restrição R2 ainda não está no ótimo pois ainda há 150 minutos de esmalte disponíveis no mês.

AL.4 (data: 10.04.2017)

(a)

max $z = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

s.a
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 5 \\ &2x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 = 4 \\ &0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 = 6 \\ &x_i \geq 0, i = 1,\ldots,7 \end{aligned}$$

(b)

$|5x_1 + 8x_2| \leq 100 \Rightarrow -100 \leq 5x_1 + 8x_2 \leq 100$

min $z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$

s.a
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 40 \\ &x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 0x_4 - x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 50 \\ &5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 20 \\ &5x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - x_7 + 0x_8 = -100 \\ &5x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + x_8 = 100 \\ &x_i \geq 0, i = 1,..,8 \end{aligned}$$

AL.5 (data: 10.04.2017)

(a)

$Eq1$

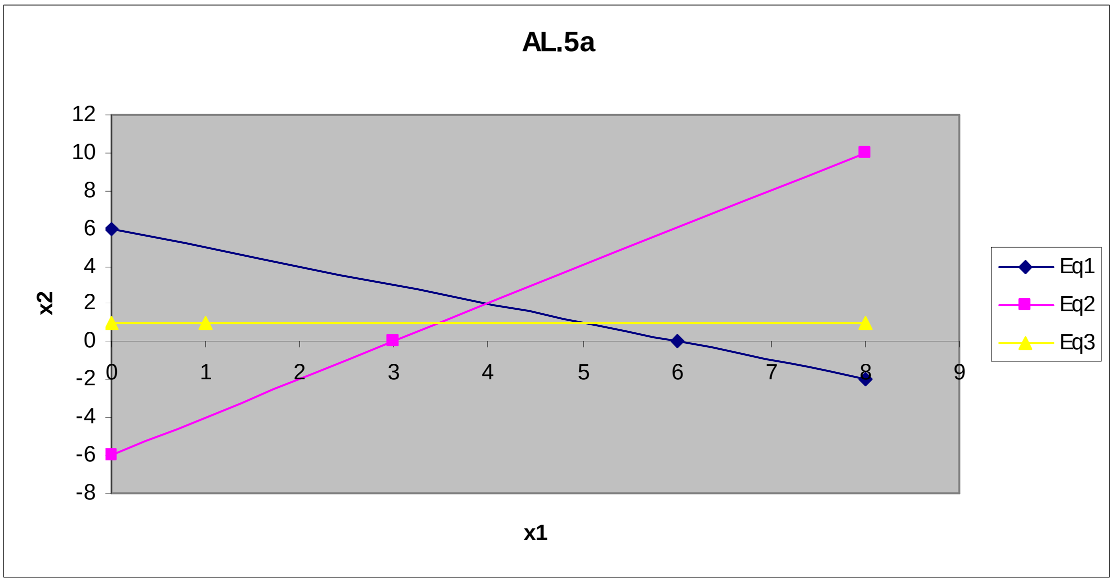
$x_1 + x_2 \le 6$

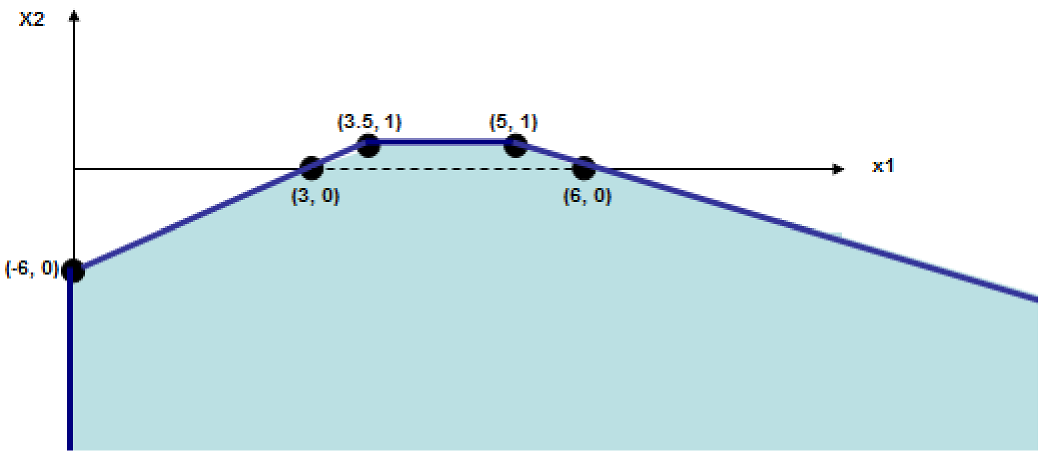
$Eq2$

$2x_1 - x_2 \le 6$

$Eq3$

$x_2 \le 1$





A região não é vazia e é ilimitada.

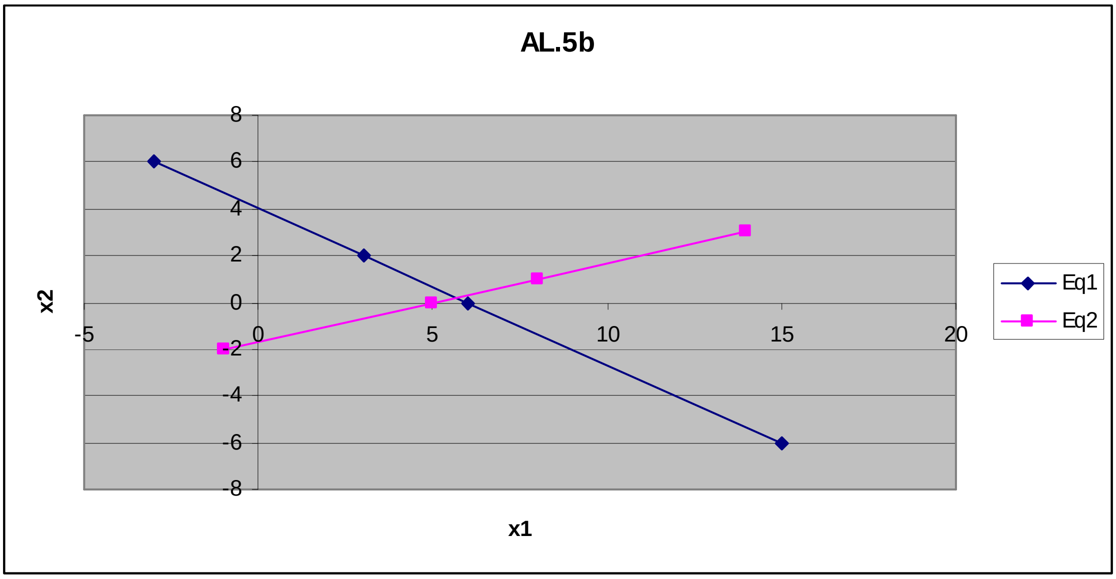
(b)

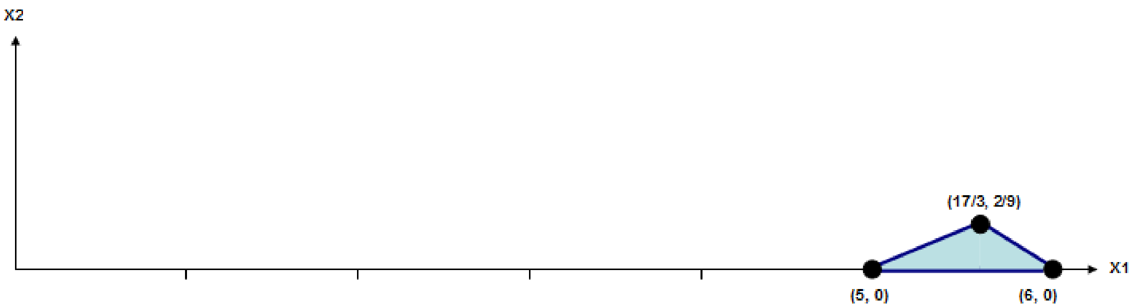
$Eg3$
$x_1 \geq 0$

$Eq4$
$x_2 \geq 0$

$Eq1$
$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$Eq2$
$x_1 - 3x_2 \leq 5$





A região não é vazia e é limitada.

(c)

$Eq1$

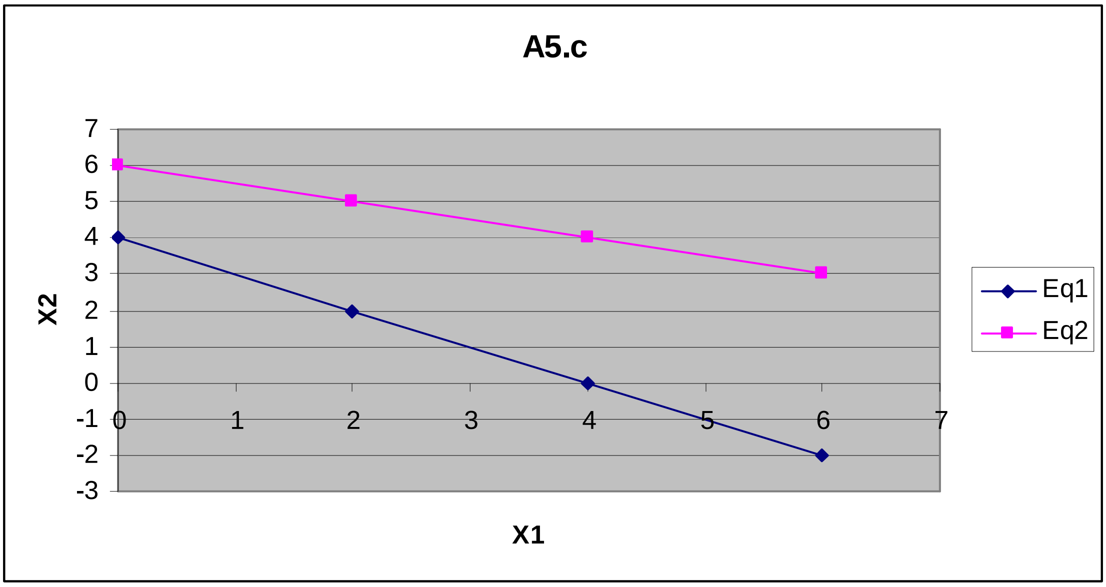
$x_1 + x_2 \leq 4$

$Eq2$

$x1 + 2x_2 \geq 12$

$Eq3$

$x_1 \geq 0$



A região é vazia (não existe intersecção entre as 2 regiões).

AL.06 (data:04.04.2018)

Tomando o sistema na forma

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_m \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$$

a) Se existir um $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_m \end{pmatrix}$ tal que $\begin{cases} y_A = 0 \\ y_b \neq 0 \end{cases}$, o sistema é inconsistente

b) Se existir um $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_m \end{pmatrix}$ tal que $\begin{cases} y_A = 0 \\ y_b = 0 \end{cases}$, há uma redundância no sistema. Pode-se eliminar uma das linhas $A_i x = b_i$, tal que $y_i \neq 0$

c) Haverá uma solução única se:

- O sistema, depois de verificado sua consistência e retirada às redundâncias, for quadrado.

- Ordem da matriz = número de incógnitas.

d) Para calcular a matriz inversa de A

- Espelhar, na matriz A, a matriz identidade $I \rightarrow AI$

- Através da técnica de pivoteamento, transformar a matriz A na matriz identidade, através de operações básicas com suas linhas.

- A matriz A será transformada em I e a matriz I em A^{-1}

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

AL.7 (data: 04.04.2017)

$$B = [B^1 B^2 B^3]$$

$$B^{-1} = A = \begin{bmatrix} \leftarrow A^1 \rightarrow \\ \leftarrow A^2 \rightarrow \\ \leftarrow A^3 \rightarrow \end{bmatrix}$$

(a)

$$C = [B^1 B^2 \alpha B^3] = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \leftarrow A^1 \rightarrow \\ \leftarrow A^2 \rightarrow \\ \leftarrow A^3 \rightarrow \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} \leftarrow A^1 \rightarrow \\ \leftarrow A^2 \rightarrow \\ \leftarrow \frac{A^3}{\alpha} \rightarrow \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = [B^1 + B^2 \quad B^2 \quad \alpha \cdot B^3] = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \leftarrow A^1 \rightarrow \\ \leftarrow A^2 \rightarrow \\ \leftarrow A^3 \rightarrow \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} \leftarrow A^1 \rightarrow \\ \leftarrow -A^1 + A^2 \rightarrow \\ \leftarrow \frac{A^3}{\alpha} \rightarrow \end{bmatrix}$$

AL.9 (data: 02.04.2018)

Não, pois a restrição $|-2x_1 + 3x_3| \geq 12$ é equivalente as restrições $-2x_1 + 3x_3 \geq 12$ e $-2x_1 + 3x_3 \leq -12$ e na segunda restrição equivalente o vetor b teria um termo negativo.

AL.10 (data: 02.04.2018)

a) Solução básica é o único vetor determinado pela escolha de uma matriz básica, fazendo as $n - m$ variáveis associadas às colunas que não estão na matriz básica iguais à zero, e resolvendo o sistema de equações para as m variáveis restantes.

b) Uma solução factível para um problema de programação linear é um vetor $x \in R^n$ que satisfaz as restrições principais e não negatividades.

c) Uma solução básica factível é uma solução básica não negativa.

d) Uma solução ótima é a solução básica factível que otimiza (maximiza/minimiza) a função objetivo. Pode acontecer de haver n soluções ótimas ou infinitas soluções.

e) Uma solução básica ótima é uma solução básica factível que maximiza/minimiza a função objetivo.

f) Uma solução tipo β é uma solução infinita, ou seja, sempre existirá uma solução factível $x \in R^n$ que aumenta/diminui o valor da função objetivo.

AL.12 (data: 10.04.2017)

a) A restrição :

$|x_1 + x_2| \leq 3$ pode ser escrita como solução válida : $x_1 + x_2 \leq 3$
portanto temos as seguintes equações :

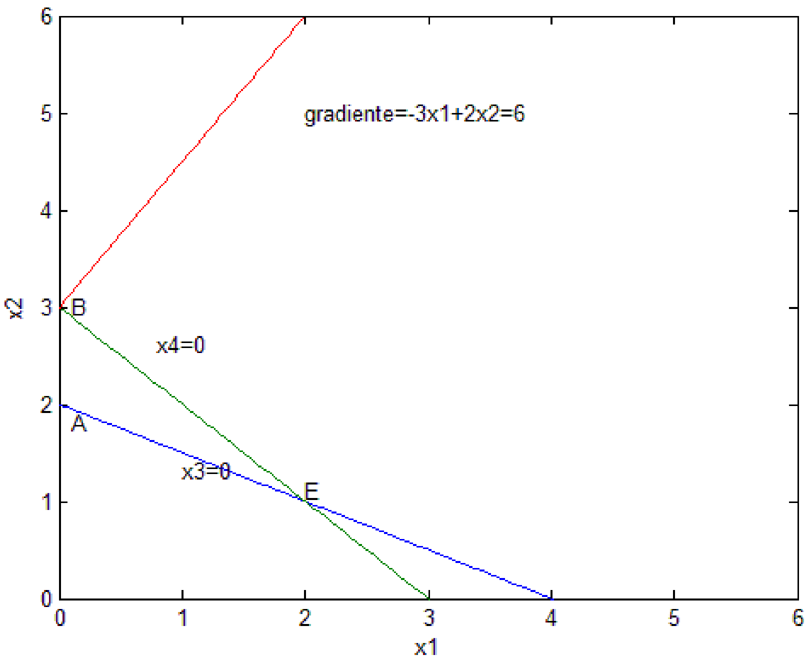
Maximizar : $z = -3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 4 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 & (2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Da primeira equação os pontos (x_1, x_2)=A(0,2) e C(4,0), formando a reta (1) no gráfico abaixo.Realizando o mesmo procedimento para a segunda equação tem-se B(0,3) ,reta e ponto D(3,0). Além disso, podemos calcular o ponto de interseção entre as duas retas que forma o ponto E(2,1). Podemos calcular o valor da função de maximização nestes pontos , conforme a tabela abaixo:

Ponto Extremo	Z	
A(0,2)	4	Reta x_1=0
B(0,3)	6	Reta x_1=0
C(4,0)	-12	Reta x_3=0
D(3,0)	-9	Reta x_4=0
E(2,1)	-4	Ponto de interseção

Portanto o ponto otimo é o B(0,3). Conforme a Figura abaixo.Podemos observar que o gradiente

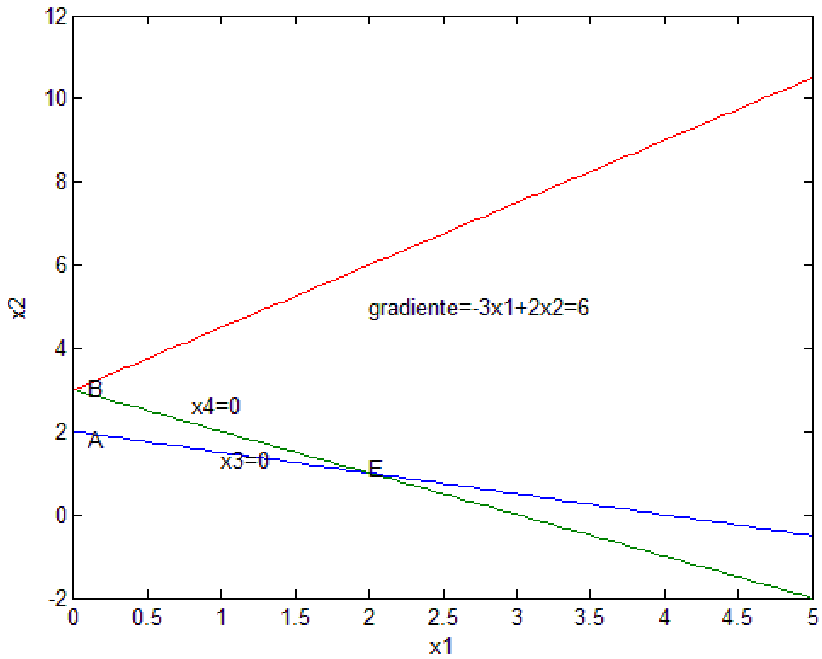


intercepta o ponto B , onde ocorre o máximo.Os lados AB,BE,EA formam a região factível.

b)

$$\begin{cases} z = -3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 4 \qquad (1) \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \qquad (2) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 = x_2^+ - x_2^- \end{cases}$$

Nestas novas condições as retas são mostradas no gráfico abaixo:



cujo o resultado é similiar ao anterior, com o mesmo valor de Z.

AL.13 (data: 03.04.2018)

	x1	x2	x3	x4	x5	b
Max	3	2	0	0	0	
s. a	1	-2	1	0	0	4
	-1	1	0	1	0	1
	1	-1	0	0	1	5

a) Colocando na forma preparada:

$$\begin{aligned} x1 - 2x2 + x3 \quad & + x6 &= 4 \\ -x1 + x2 + x4 \quad & + x7 &= 1 \\ x1 - x2 + x5 \quad & + x8 &= 5 \end{aligned}$$

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	-z0
3	2	0	0	0	0	0	0	0
1	-2	1	0	0	1	0	0	4
-1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	-1	0	0	1	0	0	1	5

I = {1, 4, 2}   J = {3, 5, 6, 7, 8}

$A^I x_I + A^J x_J = b$ (1) $(A^I)^{-1}. A^I = I$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$a - b + c = 1$
$\underline{\mathbf{b = 0}}$
$-2a + b - c = 0$
❯ $\underline{\mathbf{a = -1}}$ **e** $\underline{\mathbf{c = 2}}$

$d - e + f = 1$
$\underline{\mathbf{e = 1}}$
$-2d + e - f = 0$
❯ $\underline{\mathbf{d = 0}}$ **e** $\underline{\mathbf{f = 1}}$

$g - h + k = 1$
$\underline{\mathbf{h = 0}}$
$-2g + h - k = 0$
❯ $\underline{\mathbf{g = -1}}$ **e** $\underline{\mathbf{k = 1}}$

Portanto: $(A^I)^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Multiplicando (1) por $(A^I)^{-1}$, teremos:

$(A^I)^{-1} . A^I x_I + (A^I)^{-1} . A^J x_J = b . (A^I)^{-1}$

Sendo que: $(A^I)^{-1} . A^I = I$, $(A^I)^{-1} . A^J = \hat{A}^J$ e $b . (A^I)^{-1} = \hat{b}$

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A}^J = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{b} = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x1} \\ \mathbf{x4} \\ \mathbf{x2} \end{vmatrix}$$

$$\pi = c^I . (A^I)^{-1} = (3 \quad 0 \quad 2) . \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-5 \quad 0 \quad 8)$$

$$\hat{c}^J = c^J - \pi . A^J = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (-5 \quad 0 \quad 8) . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-5 \quad 8 \quad -5 \quad 0 \quad 8) = (5 \quad -8 \quad 5 \quad 0 \quad -8)$$

Logo, tem-se: $x^I = (6 \quad 1 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 0)$

$c^I = (0 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad -8 \quad 5 \quad 0 \quad -8)$

z = $3.x1 + 2.x2 = (3 . 6) + (2 . 1)$ **= 20**

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	-z0
0	**0**	5	**0**	-8	5	**0**	-8	**-20**
1	**0**	-1	**0**	2	-1	**0**	2	**6**
0	**0**	0	**1**	1	0	**1**	1	**6**
0	**1**	-1	**0**	1	-1	**0**	1	**1**

b) Apesar de a base ser: I = {1, 4, 2}, a variável x7 também poderia formar essa base (no lugar de x4). Portanto, é uma solução degenerada, ou seja, tipo beta.

Teremos: $x^I = [6 \quad 1 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 0]$

$$\max z = [3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\, x$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{s. a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & & & + x_6 & & & = 4 \\
& -x_1 + x_2 & + x_4 & & & + x_7 & & = 1 \\
& x_1 - x_2 & & + x_5 & & & + x_8 & = 5 \\
& x_i \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

AL.14 (data: 15.04.2017)

Seja o PL na forma preparada:

$$\begin{aligned} \hat{c}^J x_J &= Z(\max) - Z_0 \\ x_I + \hat{A}^J x_J &= b \\ x_I \geq 0, x_J &\geq 0 \end{aligned}$$

e considerando que i é a primeira componente da base 1, i.e. $1 = (i, \bar{I})$.

A condição sobre $\hat{A}^J$ para que j possa substituir i na base é:

$$x_I + \hat{A}^J x_J = b \quad \Rightarrow \quad x_I = b - \hat{A}^J x_J \geq 0 \quad \Rightarrow \hat{A}^J x_J \leq b$$

Seja

$$x_I = b - \hat{A}^J x_J \quad \Rightarrow \quad x_I^i = b_i - \hat{A}_i^J x_J,$$

sendo $\hat{A}_i^J$ a i-ésima linha de $\hat{A}^J$.

Para x_i diminuir de valor, $\sum_{k=1}^{n} (\hat{A}_i^J)_k x_J^k \geq 0$.

AL.15 (data: 21.04.2017)

Mostre que o valor ótimo de f é uma função super aditiva de b, sabendo que uma função é super aditiva se:

$$g(Y_1 + Y_2) \geq g(Y_1) + g(Y_2)$$

Seja $A \in R^{m \times n}$, $x_1, x_2 \in R^{n \times 1}$ e $x_1, x_2 \geq 0 \; \forall \; Y_1, Y_2 \in R^{n \times 1}$. Teremos o seguinte $Ax_1 = Y_1$ e $Ax_2 = Y_2$.

Assim verifica-se que

$$||Ax_1 + Ax_2||^2 = ||Ax_1||^2 + 2||Ax_1|| \, ||Ax_2|| + ||Ax_2||^2 \geq ||Ax_1||^2 + ||Ax_2||^2$$

Sendo assim teremos:

$$||Ax_1 + Ax_2||^2 \geq ||Ax_1||^2 + ||Ax_2||^2$$

Chamando $Ax_1 = Y_1, Ax_2 = Y_2$ teremos

$$||Y_1 + Y_2||^2 \geq ||Y_1||^2 + ||Y_2||^2$$

Contudo denominando $g(Y)$ como a norma ao quadrado teremos:

$$g(Y_1 + Y_2) \geq g(Y_1) + g(Y_2)$$

Podemos ainda escrever $\forall \; b_1, b_2, b_3 \in R^{n \times 1}, Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, Ax_1 + Ax_2 = b_3$,ou seja, $b_1 + b_2 = b_3$, logo nota-se que

$$||b_3||^2 \geq ||b_1||^2 + ||b_2||^2$$

Diante disso concluímos que o valor ótimo de f é uma função super aditiva de b.

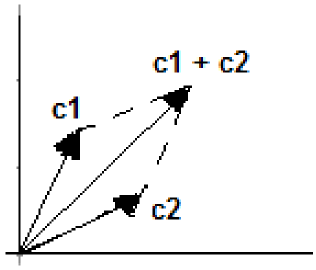
AL.16 (data: 03.04.2018)

$g(Y1 + Y2) <= g(Y1) + g(Y2)$

$$\left.\begin{array}{r} \max\ f = c'_1 \,.\, x \\ \text{s. a}\quad Ax = b \\ x >= 0 \end{array}\right\rangle f(c1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \max\ f = c'_2 \,.\, x \\ \text{s. a}\quad Ax = b \\ x >= 0 \end{array}\right\rangle f(c2)$$

$$\begin{array}{r} \max\ f = (c_1 + c_2)' \,.\, x \\ \text{s. a}\quad Ax = b \\ x >= 0 \end{array}$$



AL.18 (data: 04.04.2017)

2	**1**	10	7	A	19		2	1	10	7	A	19	
1	1	6	4	6	13		**1**	0	4	3	A-6	6	
5	2	24	17	15	44	P(1.2)→	1	0	4	3	15-2A	6	P(2.1)→
2	3	14	9	17	35		4	0	16	12	3A-17	22	
0	4	6	1	20	40		8	0	34	27	4A-20	36	

	0	1	2	1	5	7
	1	0	4	3	A-6	6
P(2.1)→	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	2
	0	0	-2	-3	0	12

Assim, de $A-6=1 \rightarrow A=7$.

(a)

0	1	2	1	5	7	
1	0	4	3	A-6	6	
0	0	0	0	0	0	$\Rightarrow$ Redundância
0	0	0	0	0	2	$\Rightarrow$ Incompatibilidade
0	0	-2	-3	0	12	$\Rightarrow$ Incompatibilidade para $x \geq 0$

Falando de outra forma, podemos dizer que se

$$x \geq 0 \Rightarrow \exists \text{ algum } y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5] \neq 0 \text{ tal que} \begin{cases} \begin{Bmatrix} y \cdot A = 0 \\ y \cdot b = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \text{Redundância} \\ \begin{Bmatrix} y \cdot A = 0 \\ y \cdot b \neq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \text{Incompatibilidade} \\ \begin{Bmatrix} y \cdot A \leq 0 \\ y \cdot b \geq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \text{Incompoatibilidade, pois } x \geq 0 \end{cases}$$

(b)

Para x livre, a linha 5 do Tableu deixa de ser incompatível.

AL.20 (data: 30.03.2018)

Um conjunto é chamado conjunto convexo se dados dois pontos x_1 e $x_2 \in S$, então $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ para cada $\lambda \in [0,1]$. Assim, temos que: $Ax = b \Rightarrow A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \Rightarrow \lambda(Ax_1) + (1-\lambda)Ax_2 \Rightarrow \lambda b + (1-\lambda)b = b$. Portanto, S é um conjunto convexo.

Lista – Simplex (SPX)

SPX.01 (data: 03.04.2018)

Seja o PL

$$\max x = 3X_1 + X_2$$

s.a.

$$\begin{cases} |X_1 + 2X_2 + 10| \geq 4 \\ X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

R3: Fica for a pois X1 e X2 são maiores ou iguais a zero

1) Forma Preparada

	X1	X2		Z
FO	3	1		
R1	1	2	>=	-6
R2	1	1	<=	5
R3	1	2	<=	-14

Passo1:

Preparando

$$\max x = 3X_1 + X_2$$

s.a.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = -6 \\ X_1 + X_2 + X_5 = 5 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma preparada:

2) Tableu 1

	X1	X2	X3	X4	X5	Z
FO	3	1	0	0	0	-
R1	1	2	-1	1	0	-6
R2	1	1	0	0	1	5

Tableu 2						
	X1	X2	X3	X4	X5	Z
FO	3	1	0	0	0	-
R1	1	2	-1	1	0	-6
R2	1	1	0	0	1	5

Passo 1 : (-3) * R2 + FO

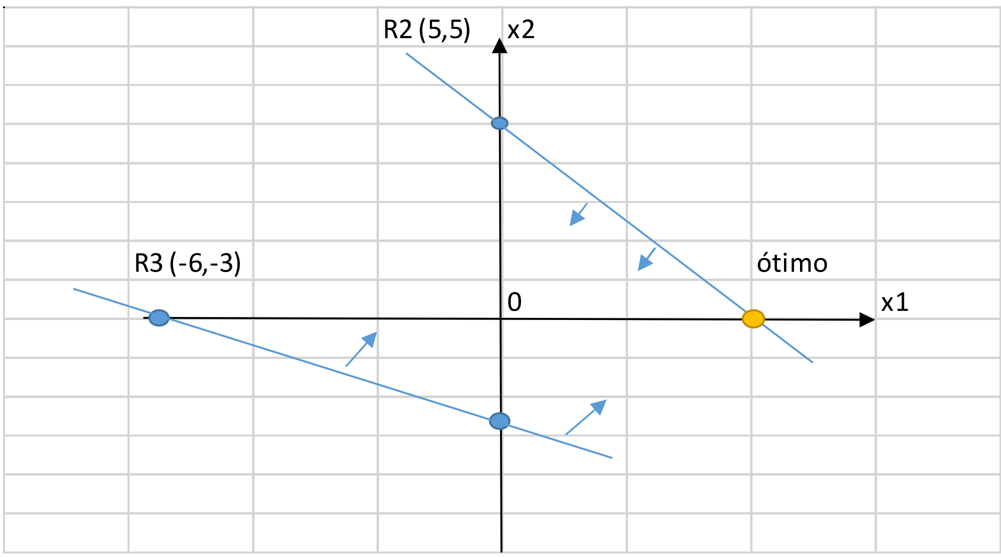
Passo 2 : (-1) * R2 + R1

Tableu 2						
	X1	X2	X3	X4	X5	Z
FO	0	-2	0	0	-3	-15
R1	0	1	-1	1	-1	-11
R2	1	1	0	0	1	5

Aplicando X1 = 5

5 + X2 <= 5, com isso X2 =0

Colocando no gráfico.



SPX.2 (data: 10.04.2017)

(a)

Se o sistema é incompatível, significa que a variável artificial na base é diferente de 0 (zero).

(b)

Se o sistema é compatível, siginifica que a variável artificial na base é 0 (zero). Assim, deve-se retirar essa variável da base e continuar com o desenvolvimento do método para se obter a solução do sistema.

SPX.3 (data: 24.05.2019)

Cálculo via Método das Duas Fases

1. Colocamos o problema na forma padrão e incluimos as variáveis de folga, x_4, x_5 e x_6:

$$\begin{aligned} Min\, z &= 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\ sa\;\; x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_6 &= 6 \end{aligned}$$

2. Incluimos as variáveis artificiais, x_7, x_8 e x_9:

$$\begin{aligned} Min\, z &= 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\ sa\;\; x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_8 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_6 + x_9 &= 6 \end{aligned}$$

3. Fase I:

$$\begin{aligned} Min\, \phi &= x_7 + x_8 + x_9 \\ sa\;\; x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_8 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_6 + x_9 &= 6 \end{aligned}$$

(a) Colocamos o problema em forma de tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$-\phi_0$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	
1	2	1	-1	0	0	1	0	0	4
2	1	1	0	-1	0	0	1	0	5
2	3	2	0	0	-1	0	0	1	6

(b) Preparamos o tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$-\phi_0$
-5	-6	-4	1	1	1	0	0	0	-15
1	2	1	-1	0	0	1	0	0	4
2	1	1	0	-1	0	0	1	0	5
2	3	2	0	0	-1	0	0	1	6

(c) Realizando o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 1$.
Min$\{\frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{3}\}$, $r = 1$. x_2 entra na base e x_7 sai da base.

x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$-\phi_0$	
-5	-6	-4	1	1	1	0	0	0	-15	
1	**2**	1	-1	0	0	1	0	0	4	$\leftarrow$
2	1	1	0	-1	0	0	1	0	5	
2	3	2	0	0	-1	0	0	1	6	

(d) Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 3$.

Min$\{\frac{2}{\frac{1}{2}}, \frac{3}{\frac{3}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\}$, $r = 3$. x_1 entra na base e x_9 sai da base.

↓ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$-\phi_0$	
-2	0	-1	-2	1	1	3	0	0	-3	
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	2	
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	-$\frac{1}{2}$	1	0	3	
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-1	-$\frac{3}{2}$	0	1	0	←

(e) Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 2$.

Min$\{\frac{2}{1}, \frac{3}{3}, \frac{0}{2}\}$, $r = 2$. x_6 entra na base e x_8 sai da base.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	↓ x_6	x_7	x_8	x_9	$-\phi_0$	
0	0	1	4	1	-3	-3	0	4	-3	
0	1	0	-2	0	1	2	0	-1	2	
0	0	-1	-4	-1	**3**	4	1	-3	3	←
1	0	1	3	0	-2	-3	0	2	0	

(f) Fim da Fase I.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$-\phi_0$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	1
0	0	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{4}{3}$	-$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	1
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	0	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2

4. Fase II:

(a) Eliminamos as variáveis artificiais e voltamos para o problema original

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$
9	6	12	0	0	0	
0	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
0	0	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{4}{3}$	-$\frac{1}{3}$	1	1
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	0	2

(b) Fim da Fase II. Colocamos o tableau na forma preparada, percebe-se que ele já está no ótimo.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$
0	0	7	1	4	0	-24
0	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
0	0	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{4}{3}$	-$\frac{1}{3}$	1	1
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	0	2

5. Resultados:

$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } z^* = 24$$

Este problema também poderia ser resolvido utilizando o **Dual Simplex**.

1. Colocamos o problema na forma padrão e incluimos as variáveis de folga:

$$
\begin{aligned}
Min\, z &= 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\
sa\;\; x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \qquad\quad &= 4 \\
2x_1 + x_2 + x_3 \quad - x_5 \quad &= 5 \\
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad - x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

2. Colocamos o problema em forma de tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$
9	6	12	0	0	0	0
1	2	1	-1	0	0	4
2	1	1	0	-1	0	5
2	3	2	0	0	-1	6

3. Preparamos o tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$
9	6	12	0	0	0	0
-1	-2	-1	1	0	0	-4
-2	-1	-1	0	1	0	-5
-2	-3	-2	0	0	1	-6

4. Aplicando o Dual Simplex:

   (a) Realizando o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 3$.

	$\downarrow$						
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$	
9	6	12	0	0	0	0	
-1	-2	-1	1	0	0	-4	
-2	-1	-1	0	1	0	-5	
-2	**-3**	-2	0	0	1	-6	$\leftarrow$

   (b) Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 2$.

$\downarrow$							
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$	
5	0	8	0	0	2	-12	
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	-$\frac{2}{3}$	0	
-$\mathbf{\frac{4}{3}}$	0	-$\frac{1}{3}$	0	1	-$\frac{1}{3}$	-3	$\leftarrow$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	-$\frac{1}{3}$	2	

   (c) Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 1$.

					$\downarrow$		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$	
0	0	$\frac{27}{4}$	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{93}{4}$	
0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	-$\mathbf{\frac{3}{4}}$	-$\frac{3}{4}$	$\leftarrow$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	
0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

   (d) Chegamos ao tableau ótimo.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_0$
0	0	7	1	4	0	-24
0	0	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{4}{3}$	-$\frac{1}{3}$	1	1
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	0	2
0	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1

5. Resultados: $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $z^* = 24$

SPX.4 (data: 15.04.2017)

Não é possível pois o custo das variáveis artificiais é 1 e seu valor é não-negativo. Por se tratar de um problema de minimização e o menor valor que a função objetivo pode assumir é zero, o problema não pode ser ilimitado.

SPX.5 (data: 26.03.2018)

O problema na forma padrão, com a adição de variáveis artificiais, fica no seguinte formato

$$\begin{cases} min z = 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5 \\ s.a \begin{array}{c} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 = 19 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 57 \end{array} \end{cases}$$

Dada a solução factível: $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$ e $x_5 = 0$.

Pode-se obter os valores das variáveis artificiais para essa solução.

$$\begin{cases} 5 + 4 + 2(5) + 3(0) + 5(0) + x_6 = 19 \\ 2(5) + 4(4) + 3(5) + 2(0) + (0) + x_7 = 57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = 0 \\ x_7 = 16 \end{cases}$$

Portanto, uma solução básica factível para o problema, tendo *I* = {*6, 7*} é

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z_0$
10	24	20	20	25	0	0	–
1	1	2	3	5	1	0	19
2	4	3	2	1	0	1	57

Ou ainda

x_4	x_5	x_6	x_7	$-z_0$
20	25	0	0	-246
3	5	1	0	19
2	1	0	1	57

SPX.6 (data: 04.04.2017)

A região de factibilidade para o problema é em 3 dimensões, o que torna difícil a solução geométrica dela.

Sabemos que o método das 2 fases ao final da primeira fase nos dá uma solução BÁSICA factível, algo que é mais restritivo do que apenas uma solução factível. Ao utilizar esse método para o problema SPX.6, encontra-se que não há uma solução básica factível no término da primeira fase, indicando que o problema é infactível.

-1	-2	-1	0	0	1	0	-4
3	**10**	5	1	0	0	0	15
33	-10	9	0	1	0	0	33
1	2	1	0	0	-1	1	4

-2/5	0	0	1/5	0	1	0	-1
3/10	1	1/2	1/10	0	0	0	3/2
36	0	14	1	1	0	0	48
2/5	0	0	-1/5	0	-1	1	1

0	0	7/45	19/90	1/90	1	0	-7/15
0	1	23/60	11/120	-1/120	0	0	11/10
1	0	7/18	1/36	1/36	0	0	4/3
0	0	-7/45	-19/90	-1/90	-1	1	7/15

Repare que $c^* \geq 0$ e $\phi \neq 0$, logo o problema é infactível.

Uma rápida análise das restrições mostram que para $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, a segunda e a terceira restrições são satisfeitas quase no limite, mas não a primeira, indicando que não há região factível para o problema.

Utilizando a função do MATLAB, dada por $x = linprog(f, A, b)$, com:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ 33 & -10 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 15 \\ 33 \\ -4 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Obtemos como resposta do programa que não há solução factível.

Assim, não há solução factível para o problema.

SPX.08 (data: 03.04.2018)

Admitindo a inexistência de soluções degeneradas , apresente um argumento convincente para a convergência do algorítimo SIMPLEX.

Se não houver soluções degeneradas: numa interação do método simplex quando se passa de uma solução básica factivel à outra a função objetio cresce, conforme Equação 1. Como a função objetivo cresce estritamente a cada iteração e o número de soluções básicas factiveis é **finito,** então o método simplex converge em uma solução ótima finita ou para uma solução ótima ilimitada em um número finito de passo.

Equação 1.

$$z = c'^{s}.\ b'_{r} / \ A'^{s}_{r}$$

Premissa

$$b'_{r} > 0 \ (solução\ não\ degenada!!!)$$

$$c'^{s} > 0, se\ c'^{s}\ \leq 0\ , chegamos\ solução\ ótima$$
$$A'^{s}_{r}\ > 0, se\ c'^{s} >\ 0\ e\ A'^{s}_{r}\ \leq 0\ , chegamos\ solução\ ilimitada$$

SPX .09 (data: 03.04.2018)

a) $$Max\ z = 5X_1 + X_2$$

$$\begin{array}{lll} 2X_1 & +3X_2 & \leq 14 \\ 2X_1 & +X_2 & \leq 10 \\ X_1 & +X_2 & \geq 8 \end{array}$$ s.a.

b) $$Max\ z = 5X_1 + X_2$$

$$\begin{array}{llllll} 2X_1 & +3X_2 & +X_3 & & & = 14 \\ 2X_1 & +X_2 & & +X_4 & & = 10 \\ X_1 & +X_2 & & & -X_5 & = 8 \end{array}$$ s.a.

Adicionando a variável X_6 para obter uma base factível.

$$Min\ \phi = X_6$$

$$\begin{array}{lllllll} 2X_1 & +3X_2 & +X_3 & & & & = 14 \\ 2X_1 & +X_2 & & +X_4 & & & = 10 \\ X_1 & +X_2 & & & -X_5 & +X_6 & = 8 \end{array}$$ s.a.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
0	0	0	0	0	1	0
2	3	1	0	0	0	14
2	1	0	1	0	0	10
1	1	0	0	-1	1	8

Preparando o problema para a base $I = \{3\ 4\ 6\}$ e resolvendo a Fase I.

X_2	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
-1	-1	0	0	1	0	-8
2	3	1	0	0	0	14
2	1	0	1	0	0	10
1	1	0	0	-1	1	8

$I = \{3\ 4\ 6\}$; Pivoteando em torno de A_{11}

X_2	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
0	-½	0	½	1	0	-3
0	2	1	-1	0	0	4
1	½	0	½	0	0	5
0	½	0	-½	-1	1	3

$I = \{3\ 2\ 6\}$; Pivoteando em torno de A_{12}

X_2	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
0	0	¼	¼	1	0	-2
0	1	½	-½	0	0	2

1	0	-¼	¾	0	0	4
0	0	-¼	-¼	-1	1	2

$I = \{2\ 1\ 6\}$

Problema infactível, pela Fase I não é possível minimizar ϕ.

c) Flexibilizando a matéria prima *A,* ou seja, aquisição sem custo, o que implica em uma quantidade ilimitada de *A*. Tomando *M* como um valor grande de matéria prima *A*, o tableau da Fase I preparado na base $I = \{3\ 4\ 6\}$ é:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
-1	-1	0	0	1	0	-8
2	3	1	0	0	0	*M*
2	1	0	1	0	0	10
1	1	0	0	-1	1	8

$I = \{3\ 4\ 6\}$; Pivoteando em torno de A_{22}

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
0	-½	0	½	1	0	-3
0	2	1	-1	0	0	*M*-10
1	½	0	½	0	0	5
0	½	0	-½	-1	1	3

$I = \{3\ 2\ 6\}$; Pivoteando em torno de A_{32}

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	$-\phi_0$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	4	-4	*M*-22
1	0	0	1	1	-1	2
0	1	0	-1	-2	2	6

$I = \{3\ 2\ 1\}$

Resolução da Fase I, base factível para a Fase II $I = \{3\ 2\ 1\}$, com a minimização de ϕ, e com a variável X_6 fora da base. Flexibilizando a matéria prima *B* não é possível de minimizar ϕ, o problema é infactível.

d) Resolução Fase II.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$-z_0$
5	1	0	0	0	0
0	0	1	1	4	M-22
1	0	0	1	1	2
0	1	0	-1	-2	6

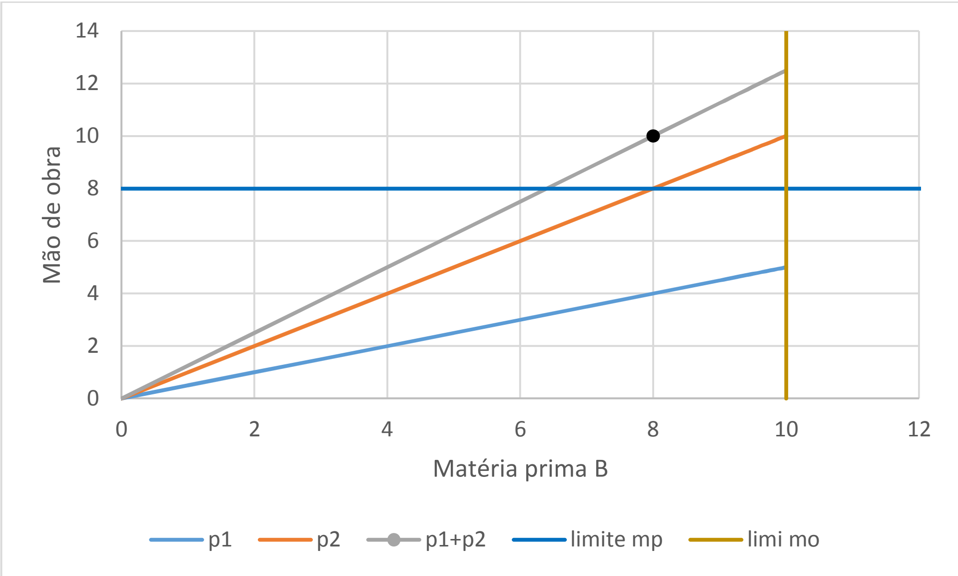
Preparando para a base $I = \{3\ 2\ 1\}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$-z_0$
0	0	0	-4	-3	-16
0	0	1	1	4	M-22
1	0	0	1	1	2
0	1	0	-1	-2	6

$X_1 = 2, X_2 = 6$

O problema na Fase II preparado para a base $I = \{3\ 2\ 1\}$ já se encontra no valor ótimo $X_1 = 2, X_2 = 6$, para atingir todas restrições é necessário 22 unidades da matéria prima A, e não 14 como proposto.

e) Gráfico Matéria prima B vs. Mão de obra, o ponto em destaque é o valor ótimo do problema flexibilizado.



SPX.10 (data: 21.04.2017)

Obtenha a solução ótima do PL dado. Explique por meio de um gráfico a caminhada rumo ao ótimo, a partir do ponto dado pelo quadro.

$$\begin{cases} \max & Z = x_1 + 2x_2 \\ s.a & 2x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & 6x_1 + 9x_2 \geq 15 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

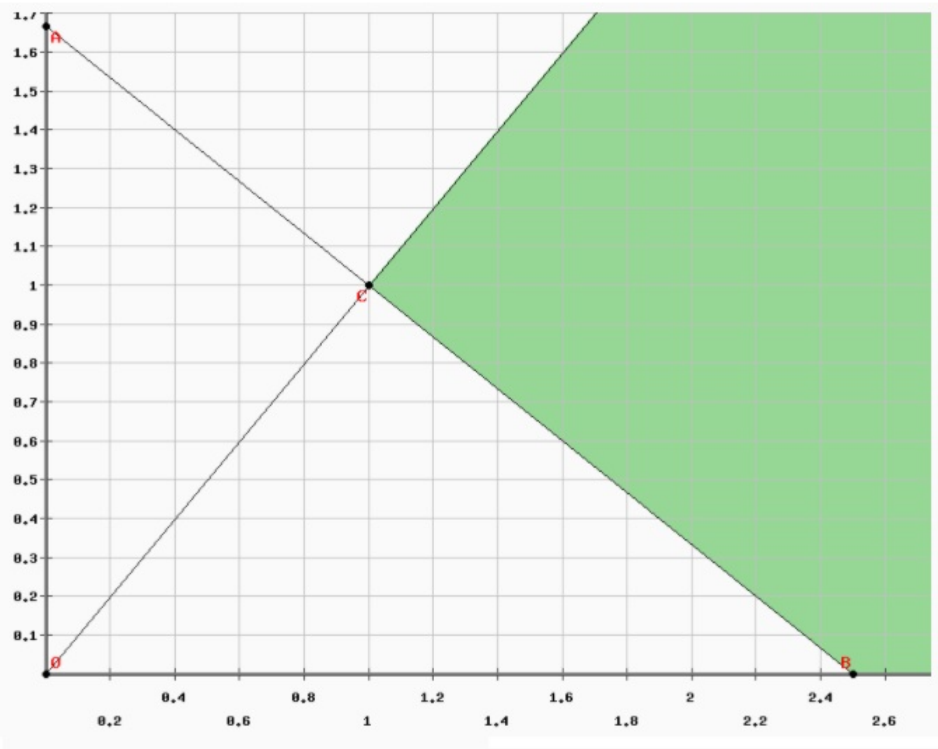


Figura 2: Solução geométrica do problema proposto

Ponto	Coordenada (X_1)	Coordenada (X_2)	Valor da função objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	5 / 3	10 / 3
B	5 / 2	0	5 / 2
C	1	1	3

Figura 3: Resultados numéricos

SPX.11 (data: 30.03.2018)

$$\begin{cases} max & z = x_1 + 2x_2 & \\ s.a & -x_1 + x_2 & \geq 3 \\ & x_1 + x_2 & \leq 27 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq 3 \\ & x_i & \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.a & -x_1 + x_2 - x_3 & = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 & = 27 \\ & -2x_1 + x_2 + x_5 & = 3 \\ & x_i & \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1:

$$\begin{cases} min & \phi = x_a \\ s.a & -x_1 + x_2 - x_3 + x_a & = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 & = 27 \\ & -2x_1 + x_2 + x_5 & = 3 \\ & x_i & \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} max & \phi = -x_a \\ s.a & -x_1 + x_2 - x_3 + x_a & = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 & = 27 \\ & -2x_1 + x_2 + x_5 & = 3 \\ & x_i & \geq 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	$-\phi_0$
					-1	-
-1	1	-1			1	3
1	1		1			27
-2	1			1		3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	$-\phi_0$
-1	1	-1				3
-1	1	-1			1	3
1	1		1			27
-2	1			1		3

I = {a,4,5}
J = {1,2,3}

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	$-\phi_0$
1		-1		-1		0
1		-1		-1	1	0
3			1	-1		24
-2	1			1		3

I = {a,4,2}
J = {1,3,5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	$-\phi_0$
1		-1		-1		0
1		-1		-1	1	0
3			1	-1		24
-2	1			1		3

I = $\{$a,4,2$\}$
J = $\{$1,3,5

Como $\phi = 0$, podemos seguir para a FASE II:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
1	2				-
1		-1		-1	0
3			1	-1	24
-2	1			1	3

I = $\{$a,4,2$\}$
J = $\{$1,3,5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
5				-2	-6
1		-1		-1	0
3			1	-1	24
-2	1			1	3

I = $\{$a,4,2$\}$
J = $\{$1,3,5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
		5		3	-6
1		-1		-1	0
		3	1	2	24
	1	-2		-1	3

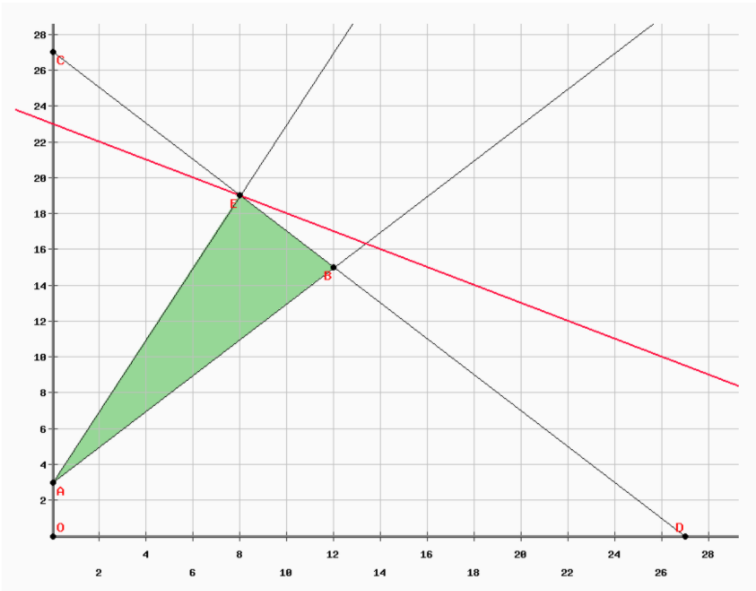
I = $\{$1,4,2$\}$
J = $\{$3,5$\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
			-5/3	-1/3	-46
1			1/3	2/3	8
		1	1/3	2/3	8
	1				19

I = {1,3,2}
J = {3,5}

Como $c_j \leq 0$, então solução ótima encontrada:
$x_1{}^* = 8$; $x_2{}^* = 19$; $x_3{}^* = 8$; $x_4{}^* = 0$; $x_5{}^* = 0$; $z^* = 46$

A interpretação geométrica do problema encontra-se na figura a seguir, com a solução encontrada para o problema no ponto extremo E (8, 19).



SPX.12 (data: 26.03.2018)

Pelo sistema de equações fornecidos no problema temos: x_6 e x_7 como variáveis artificiais; $x = x_1 - x_2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Portanto, temos

$$A = \begin{bmatrix} -4,5 & 4,5 & 8,5 & 6 & 20 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 40 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A base é dada por

$$(A^{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/8 \\ -1/160 & 9/320 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a base que o sistema se encontra é necessário realizar a seguinte operação para cada x_i: $\hat{A}^i = (A^I)^{-1} . A^i$

Usando os valores das linhas i = 1 e i = 5 temos

$$\hat{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a base *I = 1, 5*. A solução é dada por b = $(A^I)^{-1}$. b.

Portanto

$$b = \begin{bmatrix} 1000 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $x_1 = 1000$ e $x_5 = 75$.

Para encontrar π e $\pi.b$, utilizaremos os valores dos coeficientes das variáveis que estão na base

$$c^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 14 & -80 \end{bmatrix}$$

$\pi = c^{\mathrm{I}}.(A^{\mathrm{I}})^{-1}$. Portanto,

$$\pi = \begin{bmatrix} 4 & -4 \end{bmatrix}$$

e π . b = 8000, que é o valor de -z_0.

Com esses valores calculados, é possível preencher a tabela como dado a seguir.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z_0$
0	0	-48	-24	0	-4	4	-8000
1	-1	$-2,25$	-1	0	$1/4$	$-1/8$	1000
0	0	$0,0813$	$0,075$	1	$-1/160$	$9/320$	75

SPX.14 (data: 04.07.2017)

Colocando o PPL no formato padrão com as variáveis de folga:

max $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$

com $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Tableau inicial

$\downarrow$			$\uparrow$	
x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
-1	-1	0	0	0
-1	1	1	0	2
1	-2	0	1	6

Como tanto x_1 quanto x_2 têm coeficientes negativos iguais, pode-se escolher qualquer delas para entrar na base. Neste caso, escolheu-se x_1. Deve-se escolher o coeficiente mais negativo (condição de otimalidade para maximização).

A razão mínima não negativa entre os valores na coluna z pelos valores da variável que entra na base (x_1) vai decidir que variável sairá da base (condição de viabilidade):

Para a variável x_3 a razão é $2/-1=-2$ e para x_4 a razão é $6/1=6$.

A razão mínima não negativa é 6, portanto x_4 entra na base.

Aplicando pivoteamento

	$\downarrow$			
x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	-3	0	1	6
0	-1	1	1	8
1	-2	0	1	6

Como o único coeficiente negativo é -3, a variável a entrar na base é x_2 (condição de otimalidade).

Porém, não é possível atender à condição de viabilidade, pois qualquer razão entre os valores da coluna z com os valores da coluna x_2 será negativo.

Isto significa que o problema tem solução ilimitada, ou seja, $z \to \infty$. Não é possível continuar o simplex. Do tableau é possível verificar que paramos na solução factível $x_1 = 6$ e $x_2 = 0$.

SPX.15 (data: 04.07.2017)

Para obter uma solução factivel para o problema, utilizando a Fase I, colocamos as variáveis artificiais R_1, R_2, R_3 e buscamos minimizar $r = R_1 + R_2 + R_3$:

min $r = R_1 + R_2 + R_3$

sujeito a

$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + R_1 = 10$
$3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + R_2 = 11$
$x_1 + x_2 - x_4 + R_3 = 1$

com $x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2, R_3 \geq 0$

Tableau inicial

x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	R_3	$-r$
0	0	0	0	-1	-1	-1	0
2	2	1	-1	1	0	0	10
3	3	1	-2	0	1	0	11
1	1	0	-1	0	0	1	1

Para zerar os coeficientes das variáveis artificiais, soma-se cada uma das linhas à linha r, resultando no tableau seguinte:

$\downarrow$						$\uparrow$	
x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	R_3	$-r$
6	6	2	-4	0	0	0	23
2	2	1	-1	1	0	0	10
3	3	1	-2	0	1	0	11
1	1	0	-1	0	0	1	1

Como o problema na Fase I é de minimização, escolheremos o maior coeficiente positivo para selecionar a váriavel a entrar na base. Temos empate entre x_1 e x_2; escolheremos x_1.

Pela condição de viabilidade, R_3 é a escolhida para sair da base.

		$\downarrow$		$\uparrow$			
x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	R_3	$-r$
0	0	2	2	0	0	-6	17
0	0	**1**	1	1	0	-2	8
0	0	1	1	0	1	-3	8
1	1	0	-1	0	0	1	1

Pelas condições de otimalidade e viabilidade, x_3 entra na base e R_1 sai da base.

x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	R_3	$-r$
0	0	0	0	-2	0	-2	1
0	0	1	1	1	0	-2	8
0	0	0	0	-1	1	-1	0
1	1	0	-1	0	0	1	1

Apesar da variável artificial R_2 ainda continuar na base, o seu valor passou a 0. Portanto, a solução atual já é uma solução factível para o problema original.

Deduzimos então do último tableau os valores das variáveis básicas:
$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_3 = 8$

Sendo o valor das variáveis não básicas
$x_2 = 0$ $\qquad$ $x_4 = 0$

Podemos confirmar o resultado verificando se os valores encontrados atendem às restrições do problema original:

$2x_1+2x_2+x_3-x_4=10 \rightarrow 2*1+2*0+8-0=10 \rightarrow$ satisfaz
$3x_1+3x_2+x_3-2x_4=11 \rightarrow 3*1+3*0+8-2*0=11 \rightarrow$ satisfaz
$x_1+x_2-x_4=1 \rightarrow 1+0-0=1 \rightarrow$ satisfaz
$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \rightarrow$ satisfaz

Portanto a solução encontrada na Fase I é factível.

SPX.16 (data: 28.03.2018)

Colocando o P.L. na forma padrão, tem-se

$$(max)z = 3x_1+2x_2$$
$$s.a. \begin{cases} x_1-2x_2+x_3 & =4 \\ -x_1+x_2 \quad +x_4 & =1 \\ x1-x2 \qquad +x_5 & =5 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Não é possível colocar o sistema na base $I=\{2,4,1\}$, pois esta configuração é infactível. Além disso, o problema não apresentará uma solução ótima, pois trata-se de um problema ilimitado.

SPX.17 (data: 27.05.2019)

PRIMEIRA FASE:
Passo 01: Acrescentar a variável artificial "a_1".
Passo 02: Adequar a função objetivo, para que assim possamos eliminar a variável artificial.

$$\begin{cases} \phi = & \min a_1 \\ \text{s.a} & x_1+3x_3+x_4 = 5 \\ & x_2+x_5 = 5 \\ & 3x_1+2x_3-x_6+a_1 = 6 \\ & x_1+x_2+x_7 = 10 \\ & x_1\geq 0, \quad i=1,\ldots,7 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_1	$\phi-\phi_0$
0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	3	1	0	0	0	0	5
0	1	0	0	1	0	0	0	5
3	0	2	0	0	-1	0	1	6
1	1	0	0	0	0	1	0	10

Passo 03: Colocar o *tableau* na forma preparada.

Como a função objetivo trata de uma minimização, deve-se escolher o coeficiente mais negativo para entrar na base, nesse caso, x_1. Para sair escolhemos a_1, pois é a variável básica associada ao $min\left\{\frac{5}{1},\frac{6}{3},\frac{10}{1}\right\}$.

$$I=\{4,5,1,7\}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_1	$\phi - \phi_0$
-3	0	-2	0	0	1	0	0	-6
1	0	3	1	0	0	0	0	5
0	1	0	0	1	0	0	0	5
3	0	2	0	0	-1	0	1	6
1	1	0	0	0	0	1	0	10

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_1	$\phi - \phi_0$
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	$7/3$	1	0	$1/3$	0	$-1/3$	3
0	1	0	0	1	0	0	0	5
1	0	$2/3$	0	0	$-1/3$	0	$1/3$	2
0	1	$-2/3$	0	0	$1/3$	1	$-1/3$	8

concluída a otimização da primeira fase, perceba que não há coeficientes negativos, pode-se então, avançar para a segunda fase.

SEGUNDA FASE:

Passo 01: Retirar a coluna artificial.

Passo 02: Retomar função objetivo original.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\phi - \phi_0$
3	3	0	0	0	0	0	0
0	0	$7/3$	1	0	$1/3$	0	3
0	1	0	0	1	0	0	5
1	0	$2/3$	0	0	$-1/3$	0	2
0	1	$-2/3$	0	0	$1/3$	1	8

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\phi - \phi_0$
3	0	0	0	-3	0	0	-15
0	0	$7/3$	1	0	$1/3$	0	3
0	1	0	0	1	0	0	5
1	0	$2/3$	0	0	$-1/3$	0	2
0	0	$-2/3$	0	-1	$1/3$	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\phi - \phi_0$
0	0	-2	0	-3	1	0	-21
0	0	$7/3$	1	0	$1/3$	0	3
0	1	0	0	1	0	0	5
1	0	$2/3$	0	0	$-1/3$	0	2
0	0	$-2/3$	0	-1	$1/3$	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\phi - \phi_0$
0	0	0	0	0	0	-3	-30
0	0	3	1	1	0	-1	0
0	1	0	0	1	0	0	5
1	0	0	0	-1	0	1	5
0	0	-2	0	-3	1	3	9

Note que como os coeficientes são não positivos e trata-se de um problema de maximização, tem-se a solução ótima com:

$$x_1^* = x_2^* = 5,\ x_6^* = 9,\ x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$$

Ademais, uma vez que x_3 não está presente na função objetivo e pudemos observar que o seu valor ótimo é zero, a análise gráfica do problema pode ser feita considerando a variável x_3 nula. Assim, ao plotar a solução gráfica tem-se a Figura 4.

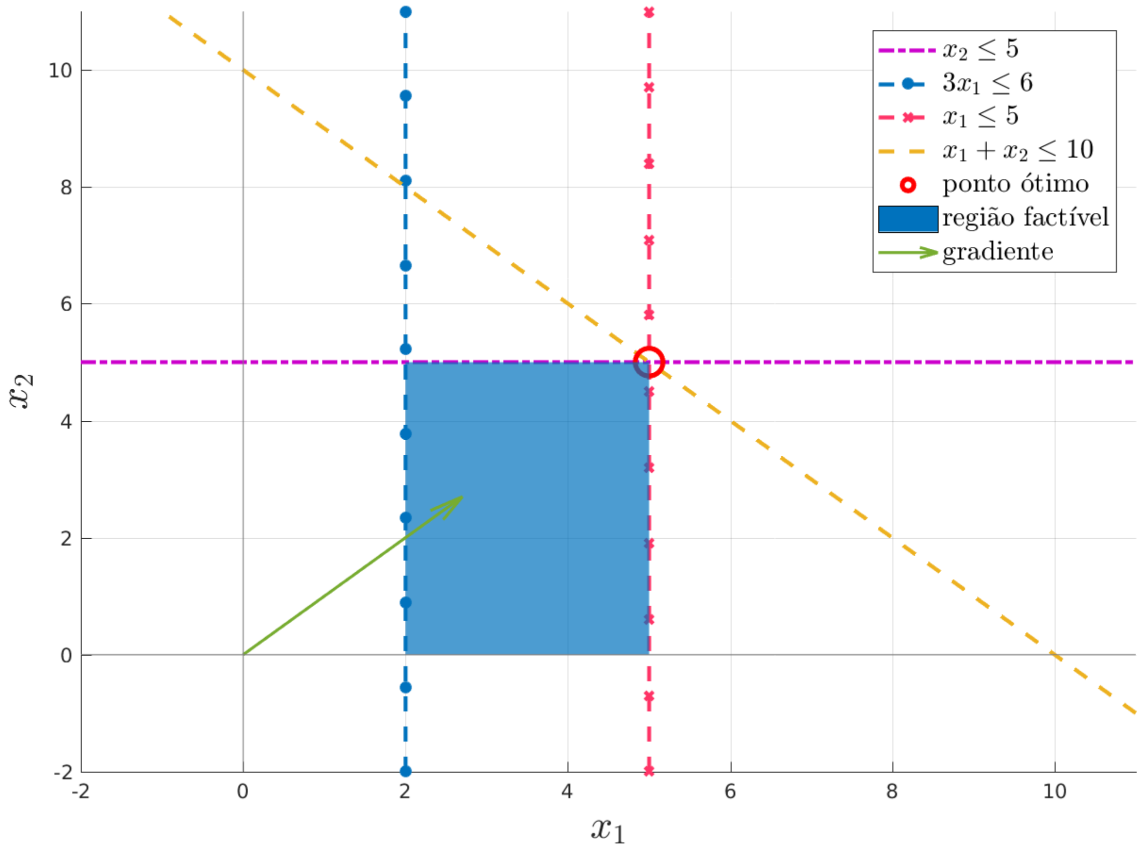


Figura 4: Solução gráfica do problema SPX.17 considerando $x_3 = 0$.

Considerando o *tableau*, bem como a análise gráfica da Figura 4 podemos concluir que:

(a) Na Figura 4 existem 3 soluções básicas ótimas.

(b) Pelo *tableau* a solução ótima $x_1^* = x_2^* = 5,\ x_6^* = 9,\ x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$ é degenerada, isso pode ser observado pela presença de um zero (destacado em azul) na solução. Além disso, analisando graficamente é notável que $x_1^* = 5$, $x_2^* = 5$, $x_3^* = 0$ também é uma solução ótima degenerada.

(c) Na Figura 4, $x_1 + x_2 \leq 10$ é uma restrição redundante.

(d) Pela análise gráfica, tem-se que a redundância ocasiona a solução degenerada.

SPX.18 (data: 28.03.2018)

(a) Na forma padrão e adicionando-se as variáveis artificiais, tem-se

$$(max) z = x_1 + x_2$$
$$s.a. \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + \quad + x_5^a \quad = 2 \\ 8x_1 - x2 \quad + x_4 + \quad + x_6^a \quad = 40 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + \quad + x_7^a \quad = 46 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

O objetivo da primeira fase obter a solução ótima do P.L para $(min)\phi = x_5^a + x_6^a + x_7^a$, ou seja, obter $\phi = 0$. Colocando o sistema no tableau, tem-se

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^a	x_6^a	x_7^a	b
z	-1	-1	0	0	0	0	0	-
x_5^a	-1	1	1	0	1	0	0	2
x_6^a	8	-1	0	1	0	1	0	40
x_7^a	5	2	3	1	0	0	1	46
ϕ	0	0	0	0	1	1	1	-

Na forma preparada, ou seja, zerando-se os coeficientes das colunas base na linha correspondente a ϕ, tem-se

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^a	x_6^a	x_7^a	b
z	-1	-1	0	0	0	0	0	-
x_5^a	-1	1	1	0	1	0	0	2
x_6^a	8	-1	0	1	0	1	0	40
x_7^a	5	2	3	1	0	0	1	46
ϕ	-12	-2	-4	-2	0	0	0	-88

Para se escolher a variável que entrará na base, deve-se observar a coluna correspondente ao menor termo na linha correspondente a ϕ e que seja menor que zero. Assim, verifica-se que x_1 entra na base.

A variável que irá sair da base será aquela correspondente à linha para a qual se obtém o menor valor de b dividido pelo termo desta mesma linha na coluna da variável que entrará na base. Portanto, x_6^a sai da base.

Pivoteando o tableau para a entrada de x_1 e a saída de x_6^a da base, tem-se

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^a	x_6^a	x_7^a	b
z	0	$-\frac{9}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_5^a	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	7
x_1	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_7^a	0	$\frac{21}{8}$	3	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	1	21
ϕ	0	$-\frac{28}{8}$	-4	$-\frac{4}{8}$	0	$\frac{12}{8}$	0	-28

Na iteração seguinte, x_3 entra e x_5^a sai da base. Pivoteando:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^a	x_6^a	x_7^a	b
z	0	$-\frac{9}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_3	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	7
x_1	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_7^a	0	0	0	0	-3	-1	1	0
ϕ	0	0	0	0	1	2	0	0

Este ponto $\phi = 0$. Logo, chegamos ao final da fase I. As variáveis artificiais não básicas podem ser eliminadas da tabela.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7^a	b
z	0	$-\frac{9}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_3	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	7
x_1	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_7^a	0	0	0	0	1	0
ϕ	0	0	0	0	0	0

Há, entretanto, uma variável artificial na base, porém o valor desta é igual a zero ($x_7^a = 0$). Além disso, ao observar os demais termos das colunas de váriáveis não básicas nesta linha, percebe-se que todos são iguais a zero. Assim, a linha e a coluna referentes à esta variável artificial podem ser eliminadas. O efeito desta linha nula é consequente da existência de **redundância** no sistema.

O tableau no final da fase I e já na forma preparada para a fase II é dado conforme segue.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	0	$-\frac{9}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	5
x_3	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	7
x_1	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	5

Para obter o valor ótimo de z, deve-se continuar o pivoteamento. Nesta iteração a variável x_2 entra na base, enquanto a variável x_3 sai, desta forma:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	0	0	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{7}$	14
x_2	0	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	8
x_1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	6

Assim, a solução ótima do problema é dada por:

$$I = \{2,1\} \quad x* = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z* = 14.$$

(b) Neste problema a base já está bem definida e é composta pelas variáveis x_3, x_4 e x_5. Desta maneira, a fase I não é necessária.

Colocando o P.L. no tableau:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
z	-1	-1	0	0	0	-
x_3	-1	1	1	0	0	2
x_4	8	-1	0	1	0	40
x_5	-1	3	0	0	1	24

A variável x_1 entra na base e a variável x_4 sai da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
z	0	$-\frac{9}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_3	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	7
x_1	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	5
x_5	0	$\frac{23}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	29

A variável x_2 entra na base e a variável x_3 sai da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
z	0	0	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	14
x_2	0	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	8
x_1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	6
x_5	0	0	$-\frac{23}{7}$	$-\frac{2}{7}$	1	6

A solução ótima equivale a

$$I = \{2, 1, 5\} \quad x* = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad z* = 14.$$

(c) Colocando na forma padrão, adicionando as variáveis artificiais e colocando no tableau, tem-se

VB	x_1	x_2	x_3	x^a	x_4	x_5	x_6	b
z	-3	-1	0	0	0	0	0	-
x^a	1	1	-1	1	0	0	0	5
x_4	-1	3	0	0	1	0	0	10
x_5	2	-1	0	0	0	1	0	10
x_6	-1	1	0	0	0	0	1	5
phi	0	0	0	1	0	0	0	-

Na forma preparada:

VB	x_1	x_2	x_3	x^a	x_4	x_5	x_6	b
z	-3	-1	0	0	0	0	0	-
x^a	1	1	-1	1	0	0	0	5
x_4	-1	3	0	0	1	0	0	10
x_5	2	-1	0	0	0	1	0	10
x_6	-1	1	0	0	0	0	1	5
phi	-1	-1	1	0	0	0	0	-5

A variável x_1 entra na base e a variável x^a sai da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x^a	x_4	x_5	x_6	b
z	0	2	-3	3	0	0	0	15
x_1	1	1	-1	1	0	0	0	5
x_4	0	4	-1	1	1	0	0	15
x_5	0	-3	2	-2	0	1	0	0
x_6	0	2	-1	1	0	0	1	10
phi	0	0	0	1	0	0	0	0

Chegamos ao final da fase I. Como x^a e *phi* são iguais a zero, as linhas e colunas correspondentes são eliminadas do tableau.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	0	2	-3	0	0	0	15
x_1	1	1	-1	0	0	0	5
x_4	0	4	-1	1	0	0	15
x_5	0	-3	2	0	1	0	0
x_6	0	2	-1	0	0	1	10

A coluna com o menor valor negativo corresponde à variável x_3. Entretanto, ao se tentar escolher a linha pivô, dividindo-se b pela coluna de x_3 não é possível obter um valor positivo. Porém, observe que a variável básica x_5 é igual a zero (isto porque existe redundância no sistema), de forma que pode ser retirada da base sem alterar o valor da função objetivo. Escolhe-se x_2 para entra na base no lugar de x_5. Assim, pivoteando a tabela, tem-se:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	15
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	5
x_4	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	15
x_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0
x_6	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	10

A variável x_3 entra na base e a variável x_4 sai da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	0	0	0	1	2	0	30
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	0	8
x_3	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	9
x_2	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	6
x_6	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	8

A solução ótima equivale a

$$I = \{1,3,2,6\} \quad x* = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad z* = 30.$$

(d) Na forma padrão, adicionando-se as variáveis artificiais e colocando no tableau, tem-se

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	x_{10}^a	b
z	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-
x_8^a	1	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	1
x_9^a	1	3	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1
x_{10}^a	1	-1	5	0	0	-1	0	0	0	1	5
x_7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	5
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-

Na forma preparada:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	x_{10}^a	b
z	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-
x_8^a	1	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	1
x_9^a	1	3	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1
x_{10}^a	1	-1	5	0	0	-1	0	0	0	1	5
x_7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	5
ϕ	-3	-2	-5	1	1	1	0	0	0	0	-7

A variável x_3 entra na base e a variável x_8^a sai da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	x_{10}^a	b
z	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	1	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	1
x_9^a	2	3	0	-1	-1	0	0	1	1	0	2
x_{10}^a	-4	-1	0	5	0	-1	0	-5	0	1	0
x_7	0	1	0	1	0	0	1	-1	0	0	4
ϕ	2	-2	0	-4	1	1	0	5	0	0	-2

A variável x_4 entra na base e a variável x_7 sai da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	x_9^a	x_{10}^a	b
z	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	5
x_9^a	2	4	0	0	-1	0	1	0	1	0	6
x_{10}^a	-4	-6	0	0	0	-1	-5	0	0	1	-20
x_4	0	1	0	1	0	0	1	-1	0	0	4
ϕ	2	2	0	0	1	1	4	1	0	0	14

Final da fase I (todos os termos da linha ϕ são positivos): não foi possível zerar o valor de ϕ, o P.L., portanto, é infactível.

SPX.19 (data: 02.04.2018)

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ s.a. \; -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_1 - x_2 \leq -3 \end{cases}$$

Colocando na forma padrão:

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ s.a. \; -x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ -2x_1 + x_2 - x_5 = 3 \end{cases}$$

Incluindo variáveis artificiais:

$$\begin{cases} \min \emptyset = x_6 + x_7 \\ s.a. \; -x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ -2x_1 + x_2 - x_5 + x_7 = 3 \end{cases}$$

Fase 1: Resolver o problema artificial pelo SIMPLEX. Minimizar $\emptyset$ e fazer com as variáveis artificiais sejam iguais à zero.

$I = \{6, 4, 7\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Base	3	-2	1	0	1	0	0	$\emptyset - 6$
x_6	-1	1	-1	0	0	1	0	3
x_4	2	0	1	1	0	-1	0	24
x_7	-1	0	1	0	-1	-1	1	0

Entra x_2 e sai x_6. $I = \{2, 4, 7\}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Base	1	0	-1	0	1	2	0	$\emptyset - 0$
x_6	-1	1	-1	0	0	1	0	3
x_4	2	0	1	1	0	-1	0	24
x_7	-1	0	1	0	-1	-1	1	0

$\emptyset$ foi minimizado e as variáveis artificiais são iguais à zero. Assim, podemos ir para a Fase 2.

Fase 2: com a solução básica factível encontrada na Fase 1, aplica-se o SIMPLEX no problema original. $I = \{2, 4\}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	1	1	0	0	0	$Z -$
x_2	-1	1	-1	0	0	3
x_4	2	0	1	1	0	24

Colocar na forma preparada e pivotear:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	2	0	1	0	0	$Z - 3$
x_2	-1	1	-1	0	0	3
x_4	2	0	1	1	0	24

Entra x_1 e sai x_4. $I = \{2, 1\}$.

Colocar na forma preparada e pivotear:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	2	0	1	0	0	$Z - 3$
x_2	-1	1	-1	0	0	3
x_1	1	0	$1/2$	$1/2$	0	12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	0	0	0	-1	0	$Z - 27$
x_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	15
x_1	1	0	$1/2$	$1/2$	0	12

Não existem mais variáveis com coeficientes positivos na função objetivo. Assim, o SIMPLEX é finalizado e entramos a solução básica ótima com $x_1 = 12$, $x_2 = 15$ e $Z = 27$.

SPX.20 (data: 15.04.2017)

Neste exercício será aplicado o método o método das duas fases no PL apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \min & z = 4x_1 + 12x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ s.a & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Colocando o problema na forma padrão:

FASE I:

$$\begin{cases} \min & \phi = x_6 + x_7 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ s.a & x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1 - x_5 + x_7 = 4 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

No Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ϕ
0	0	0	0	0	1	1	0
2	1	−1	0	0	1	0	6
1	3	0	1	0	0	0	8
1	0	0	0	−1	0	1	4

$\Rightarrow$ Colocando o sistema na forma preparada:

obtém-se como resultado:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ϕ
−3	−1	1	0	1	0	0	−10
2	1	−1	0	0	1	0	6
1	3	0	1	0	0	0	8
1	0	0	0	−1	0	1	4

$\Rightarrow x_1$ entra na base no lugar de x_6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ϕ
0	1/2	−1/2	0	1	3/2	0	−1
1	1/2	−1/2	0	0	1/2	0	3
0	5/2	1/2	1	0	−1/2	0	5
0	−1/2	1/2	0	−1	−1/2	1	1

$\Rightarrow x_3$ entra na base no lugar de x_7

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ϕ
0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	−1	0	1	4
0	3	0	1	1	0	−1	4
0	−1	1	0	−2	−1	2	2

$\Rightarrow$ Fim da Fase I, com $\phi = 0$, $x_6 = x_7 = 0$.

(b) Encontrando o ótimo na Fase II:

Solução inicial factível do problema original:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$
4	12	0	0	0	0
1	0	0	0	−1	4
0	3	0	1	1	4
0	−1	1	0	−2	2

$\Rightarrow$ Colocando na forma preparada:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$
0	12	0	0	4	-16
1	0	0	0	-1	4
0	3	0	1	1	4
0	-1	1	0	-2	2

$\Rightarrow x_2$ entra na base no lugar de x_5.

Rearranjando o sistema e fazendo as permutações, obtém-se:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$
0	0	0	-4	0	-32
1	0	0	0	-1	4
0	1	0	$1/3$	$1/3$	$4/3$
0	0	1	$1/3$	$-5/3$	$10/3$

$\Rightarrow$ Fim da Fase II.

Solução ótima:

$$x^* = \begin{vmatrix} 4 \\ 4/3 \\ 10/3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad Z^* = 32.$$

(c) O sistema possui uma outra solução alternativa: x_5 poderia entrar na base e não mudaria o valor da função objetivo. Exemplo: trocando a base x_2 por x_5 obtém-se o tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$
0	0	0	-4	0	-32
1	3	0	1	0	8
0	3	0	1	1	4
0	5	1	2	0	10

com

$$x^* = \begin{vmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \quad , \quad Z^* = 32.$$

SPX.21 (data: 30.03.2018)

(a) Determinar a base e a solução básica correspondente ao quadro.
$I = \{x_1, x_5, x_3\}$
Solução básica:
$x_1 = 2/3$
$x_2 = 0$
$x_3 = 8/3$
$x_4 = 0$
$x_5 = 4$
$x_6 = 0$
$z = 10$

(b) Encontre a matriz inversa $(A^I)^{-1}$.

Conforme quadro apresentado, existe uma matriz inversa que reverter as operações de pivoteamento realizadas no problema linear e retornar o problema na forma preparada:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 10\\ 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 2/3\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 8/3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Assim, aplicando-se o método Simplex é possível verificar o quadro apresentado e determinar a matriz inversa $(A^I)^{-1}$.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -10\\ 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 2/3\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 8/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

Assim, obtêm-se a matriz inversa $(A^I)^{-1}$:

$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(c) Determine o vetor multiplicador: $b = [2/3, 4, 8/3]$

(d) Encontre o valor de πb.
$I = \{1, 5, 3\}$
$c_I = [c_1, c_5, c_3] \to c_I = [-1, 0, 4]$
$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

$\pi = c_I(A^I)^{-1} \to \pi = [1, 0, 2]$

(e) Este quadro é ótimo? Comente.
Este quadro é ótimo, pois todos os $c_j < 0$, então solução não mais poderá ser otimizada.

(f) Há uma solução alternativa à apresentada no quadro, com o mesmo valor de função objetivo. Explique.
Sim, como $c_2 = 0$, então x_2 poderá ser incluído na base e não haverá alteração do valor da função objetivo.

SPX.22 (data: 02.04.2018)

$$
\begin{cases}
\max & z = 1050x_1 + 1000x_2 \\
\text{s.a} & 300x_1 + 400x_2 \leq 24000 \\
 & 300x_1 + 200x_2 \leq 18000 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Na forma padrão:

$$
\begin{cases}
\max & z = 1050x_1 + 1000x_2 \\
\text{s.a} & 300x_1 + 400x_2 + x_3 = 24000 \\
 & 300x_1 + 200x_2 + x_4 = 18000 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1050	1000	0	0	0
300	400	1	0	24000
$\underline{300}$	200	0	1	18000

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	300	0	-3.5	-63000
0	200	1	-1	6000
1	$\underline{\frac{2}{3}}$	0	$\frac{1}{300}$	60

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	-1.5	-2	-72000
0	1	$\frac{1}{200}$	$\frac{-1}{200}$	30
1	0	$\frac{-1}{300}$	$\frac{1}{150}$	40

$$x_1^* = 40$$
$$x_2^* = 30$$
$$x_3^* = 0$$
$$x_4^* = 0$$

$$z^* = 72000$$

Levando em consideração apenas as restrições fornecidas pelo problema, seria interessante contratar funcionários em ambas as linhas. Nos dois casos o custo de mão de obra por produto produzido é menor que o lucro obtido.

SPX.23 (data: 21.04.2017)

Neste exercício será aplicado o método o método das duas fases no PL apresentado a seguir:

$$
\begin{cases}
\min & Z = 30x_2 + 10x_3 + 30x_5 + 10x_6 + 10x_7 + 40x_8 + 20x_9 + 50x_{10} + 70x_{11} + 90x_{12} \\
 & 2x_1 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 10000 \\
s.a & x_2 + x_5 + 2x_7 + x_8 \geq 30000 \\
 & x_3 + x_6 + x_8 + 2x_9 \geq 20000 \\
 & x \geq 0
\end{cases}
$$

(a) Colocando o problema na forma padrão:

FASE I:

$$\begin{cases} \text{min} & \phi = x_{16}+x_{17}+x_{18} \\ s.a & 2x_1+4x_4+2x_5+2x_6+x_7-x_{13}+x_{16}=10000 \\ & x_2+x_5+2x_7+x_8-x_{14}+x_{17}=30000 \\ & x_3+x_6+2x_9-x_{15}+x_{18}=20000 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

No Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	ϕ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	4	2	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10000
0	1	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	30000
0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	20000

Colocando o sistema na forma preparada, obtém-se o seguinte resultado:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	ϕ
-2	-1	-1	-4	-3	-3	-3	-1	-2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	-60000
2	0	0	4	2	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10000
0	1	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	30000
0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	20000

x_4 entra na base no lugar de x_{16}

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	ϕ
0	-1	-1	0	-1	-1	-2	-2	-2	0	0	0	0	1	1	1	0	0	-50000
$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	2500
0	1	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	30000
0	0	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	20000

x_7 entra na base no lugar de x_4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	ϕ
4	-1	-1	8	3	3	0	-2	-2	0	0	0	-2	1	1	3	0	0	-30000
2	0	0	4	2	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10000
-4	1	0	-8	-3	-4	0	1	0	0	0	0	2	-1	0	-2	1	0	10000
0	0	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	20000

x_8 entra na base no lugar de x_{17}

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	ϕ
-4	1	-1	-8	-3	-5	0	0	-2	0	0	0	2	-1	1	-1	2	0	-10000
2	0	0	4	2	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10000
-4	1	0	-8	-3	-4	0	1	0	0	0	0	2	-1	0	-2	1	0	10000
4	-1	1	8	3	5	0	0	2	0	0	0	-2	1	-1	2	-1	1	10000

x_4 entra na base no lugar de x_{18}

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	ϕ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	0	-1	0	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	5000
0	0	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	20000
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1250

(b) Encontrando o ótimo na Fase II:

Solução inicial factível do problema original:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	Z
0	-25	25	0	-25	25	0	0	50	-50	-70	-90	0	-5	-35	850000
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	0	-1	0	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5000
0	0	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	-1	20000
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	1250

Solução é ilimitada.

SPX.25 (data: 29.05.2019)

(a):

$$\begin{aligned} max \quad & z = 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 300 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(b): Na forma padrão:

$$\begin{array}{lllllllll} max & z = 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \\ \text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = 120 \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & = 140 \\ & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & & -x_6 & +x_a & = 300 \\ & & & & x \geq 0 \end{array}$$

Fase I:

$$\begin{array}{lllllllll} min & \phi = x_a \\ \text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = 120 \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & = 140 \\ & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & & -x_6 & +x_a & = 300 \\ & & & & x \geq 0 \end{array}$$

Na forma preparada:

$$\begin{array}{llllllll} -2x_1 & -3x_2 & -3x_3 & & & +x_6 & & = \phi - 300 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = 120 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & = 140 \\ 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & & -x_6 & +x_a & = 300 \\ & & & x \geq 0 \end{array}$$

e o tableau fica da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_a	ϕ
-2	-3	-3	0	0	1	0	-300
2	2	1	1	0	0	0	120
2	1	2	0	1	0	0	140
2	3	3	0	0	-1	1	300

escolhendo x_3 pra entrar na base, a variável que sai é x_5:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_a	ϕ
1	$\frac{-3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	0	-90
1	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	0	0	50
1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	70
-1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{-3}{2}$	-1	1	90

agora a variável que x_2 entra na base, e a variável que sai é x_4:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_a	ϕ
2	0	0	1	1	1	0	-40
$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{100}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{160}{3}$
-2	0	0	-1	-1	-1	1	40

Desta forma não é possível tirar a variável artificial x_a da base, de forma que não é possível encontrar uma solução inicial factível.

(c) Considerando a possibilidade de comprar matéria prima adicional pelo custo de 6 u.m.p/kg o problema fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} max \quad & z = 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 6x_4 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 + x_4 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 300 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

E na forma padrão:

$$\begin{array}{llllllllll} max & z = 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 6x_4 \\ \text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & & & & +x_{a_2} & = 120 \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & & = 140 \\ & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & & -x_6 & +x_{a_1} & & = 300 \\ & & & & x \geq 0 \end{array}$$

Fase I:

$$\begin{array}{llllllllll} min & \phi = x_{a_1} + x_{a_2} \\ \text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & & & & +x_{a_2} & = 120 \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & & = 140 \\ & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & & -x_6 & +x_{a_1} & & = 300 \\ & & & & x \geq 0 \end{array}$$

Na forma preparada:

$$\begin{array}{lllllllll} -4x_1 & -5x_2 & -4x_3 & +x_4 & & +x_6 & & & = \phi - 420 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & & & & +x_{a_2} & = 120 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & & = 140 \\ 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & & -x_6 & +x_{a_1} & & = 300 \\ & & & x \geq 0 \end{array}$$

e o tableau fica da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	ϕ
-4	-5	-4	1	0	1	0	0	-420
2	2	1	1	0	0	0	1	120
2	1	2	0	1	0	0	0	140
2	3	3	0	0	-1	1	0	300

escolhendo x_2 pra entrar na base, a variável que sai é x_{a_2}:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	ϕ
2	0	0	3	1	1	0	2	-40
$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{100}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{160}{3}$
-2	0	0	-1	-1	-1	1	-1	40

Como no item (b), a variável artificial não saiu da base, portanto não encontrou-se a solução básica factível inicial. O que torna o problema infactível é a restrição de horas mínimas de trabalho.

Lista – Simplex-Revisado (SRV)

SRV.01 (data: 02.04.2018)

a)
Inicialização:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$I = \{3,4\} \quad c_I^T = [\,0 \;\; 0\,]$$

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 1:

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = [\,0 \;\; 0\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0 \;\; 0\,]$$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \pi A^1 = 3 - [\,0 \;\; 0\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\hat{A}^1 = (A^I)^{-1} A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \{3,1\}$$

Atualização 1:

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 2:

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = [\,0 \;\; 3\,] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0 \;\; 3\,]$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = 2 - [\,0 \;\; 3\,] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 0 - [\,0 \;\; 3\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$$

Solução ótima:
X1 = 20
X3= 10
X2 = X4 = 0

Z = 60

b)

Inicialização:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$I = \{3,4\} \quad c_I^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 :

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \pi A^1 = 1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\hat{A}^1 = (A^I)^{-1} A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad I = \{3,1\}$$

Atualização 1:

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 :

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = 2 - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 5/2$$

$$\hat{A}^2 = (A^I)^{-1} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \{2,1\}$$

Atualização 2:

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 3 :

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_3 = c_3 - \pi A^3 = 0 - \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -5$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 0 - \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$$

Solução ótima:

X2 = 20
X1 = 14
X3 = X4 = 0
Z = 58

c)
Inicialização:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$I = \{3,4\} \quad c_I^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 :

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \pi A^1 = 2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\hat{A}^1 = (A^I)^{-1} A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \{3,1\}$$

Atualização 1:

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 :

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = 1 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\hat{A}^2 = (A^I)^{-1} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \{2,1\}$$

Atualização 2:

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Iteração 3 :

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_3 = c_3 - \pi A^3 = 0 - \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3/2$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 0 - \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1/2$$

Solução ótima:

X2 = 5
X1 = 1
X3 = X4 = 0
Z = 4

SRV.2 (data: 27.05.2019)

Colocando o PL original na forma padrão, utilizando as variáveis de folga indicadas, temos:

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 18 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,5. \end{cases}$$

Realizando as iterações de Simplex Revisado para $I_1 = [2,4,5]$, tem-se:
Passo 01: Determinar I (variável fornecida I_1), c^I , $\hat{b}$ e $(A^I)^{-1}$.

$$I = I_1 = [2,4,5],\ c^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Passo 02: Calcular $\pi = c^I (A^I)^{-1}$.

$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Passo 03: Calcular $\hat{c}^J = c^J - \pi A^J$.

$\hat{c}^1 = 2$, $\hat{c}^3 = -1$.

Como $\hat{c}^1 \geq 0$, a solução não é ótima. O valor de $\pi b = 8$.

Realizando as iterações de Simplex Revisado para $I_2 = [3,4,1]$, tem-se:
Passo 01: Determinar I (variável fornecida I_2), c^I , $\hat{b}$ e $(A^I)^{-1}$.

$$I = I_2 = [3,4,1],\ c^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Passo 02: Calcular $\pi = c^I (A^I)^{-1}$.

$\pi = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Passo 03: Calcular $\hat{c}^J = c^J - \pi A^J$

$\hat{c}^2 = 7$, $\hat{c}^5 = -3$

Como $\hat{c}^2 \geq 0$, a solução não é ótima. O valor de $\pi b = -18$.

Por fim, tem-se as iterações de Simplex Revisado para $I_3 = [2,4,1]$:
Passo 01: Determinar I (variável fornecida I_3), c_I , $\hat{b}$ e $(A^I)^{-1}$.

$$I = I_3 = [2,4,1],\ c_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Passo 02: Calcular $\pi = c_I (A^I)^{-1}$.

$\pi = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Passo 03: Calcular $\hat{c}_J = c_J - \pi A^J$

$\hat{c}^3 = 2$, $\hat{c}^5 = -3$

Como $\hat{c}^3 \geq 0$, a solução não é ótima. O valor de $\pi b = -10$.

SRV.4 (data: 21.04.2017)

Neste exercício será aplicado o método Simplex revisado no PL apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \max & Z = x_1 + 2x_2 \\ & -x1 + 2x_2 \geq 3 \\ s.a & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & Z = x_1 + 2x_2 \\ & -x1 + 2x_2 \geq 3 \\ s.a & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & Z = x_1 + 2x_2 \\ & -x1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ s.a & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & -2x_1 + x_2 - x_5 = 3 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Base: I = 6,4,5

$$\text{A}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (A^I)^{-1}$$

$$(c^I)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi^1 = c^I \cdot (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quem entra na base?

Será x_2 pois:

$$\widehat{c^2} = c^2 - \pi^1 \cdot A^2$$

$$\widehat{c^1} = 1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\widehat{c^2} = 2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\widehat{c^3} = \widehat{c^4} = \widehat{c^5} = \widehat{c^6} = 0$$

Quem sai da base?

$$\widehat{b} = (A^I)^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A} = (A^I)^{-1} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim x_6 sai da base

Nova Base: I = 2,4,5

Atualizar a inversa da base, ou seja, a matriz pivô.

$$P = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{I^2})^{-1} = P \cdot (A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^{I^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteração 2

$$\pi^2 = c^{I^2} \cdot (A^{I^2})^{-1} = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quem entra na base?

Será x_1 pois:

$$\widehat{c}^1 = c^1 - \pi^2 \cdot A^1$$

$$\widehat{c}^1 = 1 - \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10/3$$

$$\widehat{c}^2 = 2 - \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -10/3$$

$$\widehat{c}^3 = 0 - \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8/3$$

$$\widehat{c}^4 = 0$$

$$\widehat{c}^5 = 0$$

$$\widehat{c}^6 = -8/3$$

Quem sai da base?

$$\widehat{b} = (A^{I^2})^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A} = (A^{I^2})^{-1} \cdot A^1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$$

Assim x_4 sai da base

Nova Base: I = 2,1,5

Atualizar a inversa da base, ou seja, a matriz pivô.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4/87 & 0 \\ 0 & 1/87 & 0 \\ 0 & -8/87 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{I^3})^{-1} = P \cdot (A^{I^2})^{-1} = \begin{pmatrix} 340/261 & -4/87 & 0 \\ 2/261 & 1/87 & 0 \\ 158/261 & -8/87 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^{I^3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteração 3

$$\pi^3 = c^{I^3} \cdot (A^{I^3})^{-1} = \begin{pmatrix} 682/261 & -7/87 & 0 \end{pmatrix}$$

Quem entra na base?

Será x_3 pois:

$$\widehat{c}^1 = c^1 - \pi^3 \cdot A^1$$

$$\widehat{c}^1 = 1 - \begin{pmatrix} 682/261 & -7/87 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 964/261$$

$$\widehat{c}^2 = 2 - \begin{pmatrix} 682/261 & -7/87 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -821/261$$

$$\widehat{c}^3 = 0 - \begin{pmatrix} 682/261 & -7/87 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 682/261$$

$$\widehat{c}^4 = 7/87$$

$$\widehat{c}^5 = 0$$

$$\widehat{c}^6 = -682/261$$

Quem sai da base?

$$\widehat{b} = (A^{I^3})^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 232/87 \\ 29/87 \\ -58/87 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A} = (A^{I^3})^{-1} \cdot A^3 = \begin{pmatrix} -340/87 \\ -2/261 \\ -158/261 \end{pmatrix}$$

Assim x_5 sai da base

Nova Base: I = 2,1,3

$$c^{I^4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Atualizar a inversa da base, ou seja, a matriz pivô.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 170/29 \\ 0 & 1 & 1/87 \\ 0 & 0 & 79/87 \end{pmatrix}$$

$$(A^{I^4})^{-1} = P \cdot (A^{I^3})^{-1} = \begin{pmatrix} 36720/7569 & -1476/2523 & 170/29 \\ 332/22707 & 79/7569 & 1/87 \\ 12482/22707 & -632/7569 & 79/87 \end{pmatrix}$$

Iteração 4

$$\pi^4 = c^{I^4} \cdot (A^{I^4})^{-1} = \begin{pmatrix} 1670114988/171869283 & -22144371/19096587 & 29609/2523 \end{pmatrix}$$

Ao efetuarmos:

$$\widehat{c^i} = c^i - \pi^4 \cdot A^i,\ i = 1, \dots, 6 \tag{8}$$

Verificamos que chegamos a solução ótima!

Assim $x_1 = 8,\ x_2 = 19,\ x_3 = 27$ *e* $Z = 46$.

SRV.5 (data: 15.04.2017)

Neste exercício será aplicado o método Simplex revisado no PL apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ s.a & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Colocando o problema na forma padrão:

$$\begin{cases} \max & Z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ s.a & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Inicialização:

$$I = \{3,4\}, \quad (A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Iteração 1:
  - Cálculo de π:

$$\pi = C^I (A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Cálculo de $\hat{c}^1$:

$$\hat{c}^1 = c^1 - \pi A^1 = 2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

  Coluna a entrar na base: $s = 1$.
  - Cálculo de $\hat{A}^1$:

$$\hat{A}^1 = (A^I)^{-1} A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Linha de Bloqueio:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow I(1) = 4$$

  - Cálculo de P(r,s):

$$P(r,s) = P(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Atualizações

$$I - I(1) + 1 = \{3,4\} - 4 + 1 \rightarrow I_1 = \{3,1\}$$

$$\hat{b} = P(r,s)b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C^I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^I)^{-1} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Iteração 2:

– Cálculo de π:

$$\pi = C^I (A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– Cálculo de $\hat{c}^2$:

$$\hat{c}^2 = c^2 - \pi A^2 = 1 - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

Coluna a entrar na base: $s = 2$.

– Cálculo de A^2:

$$A^2 = (A^I)^{-1} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Linha de Bloqueio:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow I(2) = 3$$

– Cálculo de P(r,s):

$$P(r,s) = P(2,2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

– Atualizações

$$I - I(2) + 1 = \{3,1\} - 3 + 1 \rightarrow I = \{2,1\}$$

$$\hat{b} = P(r,s)b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C^I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^I)^{-1} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Iteração 3:

– Cálculo de π:

$$\pi = C^I (A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

– Cálculo de $\hat{c}^3$:

$$\hat{c}^3 = c^3 - \pi A^3 = 0 - \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3/2 < 0$$

– Cálculo de $\hat{c}^4$:

$$\hat{c}^4 = c^2 - \pi A^4 = 0 - \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1/2 < 0$$

Há uma solução ótima.

- Valor Ótimo:

– Solução x^*:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Cálculo de Z:

$$Z = \pi b = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 10.$$

SRV.6 (data: 04.07.2017)

Iteração 0

$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\qquad C_B = \begin{vmatrix} -2 & 5 \end{vmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$z_3 - c_3 = C_B B^{-1} P_3 - c_3 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix} + 8$$

$$z_3 - c_3 = \begin{vmatrix} -11 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix} + 8 = -7 + 8 \rightarrow z_3 - c_3 = 1.$$

$$z_4 - c_4 = \begin{vmatrix} -11 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} - 7 \rightarrow z_4 - c_4 = 0.$$

$$z_5 - c_5 = \begin{vmatrix} -11 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} + 15 \rightarrow z_5 - c_5 = 16.$$

$$z_6 - c_6 = \begin{vmatrix} -11 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \end{vmatrix} + 14 \rightarrow z_6 - c_6 = 22.$$

A solução não é ótima, pois existe $z_j - c_j > 0$.

Pela condição de otimalidade, devemos escolher a variável com $z_j - c_j$ mais positivo. Portanto x_6 entra na base.

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1}P_6 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Pela condição de viabilidade, devemos escolher a menor razão positiva entre $6/1$ (relativa à x_1) e $2/2$ (relativa à x_2).

Portanto x_2 sai da base.

a nova matriz B, após a troca de x_2 por x_6, fica:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \text{, sendo sua inversa } B_1^{-1} = \begin{vmatrix} 7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Iteração 1

$$X_{B_1} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_6 \end{vmatrix} \qquad C_{B_1} = \begin{vmatrix} -2 & -14 \end{vmatrix}$$

$$[z_j - c_j] = C_{B_1} B_1^{-1} P_j - c_j$$

$$[z_j - c_j] = \begin{vmatrix} -2 & -14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -8 & 7 & -15 \end{vmatrix}$$

$$[z_j - c_j] = \begin{vmatrix} -11 & 12 & -11 & 5 \end{vmatrix}$$

sendo os coeficientes relativos à x_2, x_3, x_4, x_5 respectivamente. Como o único valor positivo é 12, x_3 entra na base.

$$B_1^{-1}b = \begin{vmatrix} 7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$B_1^{-1}P_3 = \begin{vmatrix} 7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{vmatrix}$$

Dividindo os valores das primeiras linhas (relativos à x_1) obtemos um valor positivo e dividindo os valores das segundas linhas (relativos à x_6) obtemos um valor negativo.Portanto a variável que sai da base é x_1.

a nova matriz B, após a troca de x_1 por x_3, fica:

$B_2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$, sendo sua inversa $B_2^{-1} = \begin{vmatrix} 7/3 & -5/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix}$

Iteração 2

$X_{B_2} = \begin{vmatrix} x_3 \\ x_6 \end{vmatrix}$ $\quad C_{B_2} = \begin{vmatrix} -8 & -14 \end{vmatrix}$

$[z_j - c_j] = C_{B_2} B_2^{-1} P_j - c_j$

$[z_j - c_j] = \begin{vmatrix} -8 & -14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7/3 & -5/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 & -15 \end{vmatrix}$

$[z_j - c_j] = \begin{vmatrix} -8 & -7 & 1 & -7 \end{vmatrix}$

sendo os coeficientes relativos à x_1, x_2, x_4, x_5 respectivamente. Como o único valor positivo é 1, x_4 entra na base.

$B_2^{-1} b = \begin{vmatrix} 7/3 & -5/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10/3 \\ 8/3 \end{vmatrix}$

$B_2^{-1} P_4 = \begin{vmatrix} 7/3 & -5/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

a condição de viabilidade não é atingida, pois não há razão positiva possível entre os valores das primeiras linhas ($10/3$ e -1) nem entre os valores das segundas linhas ($8/3$ e 0). Portanto se deduz que o problema tem solução ilimitada.

SRV.7 (data: 10.04.2017)

$$\begin{cases} \{\text{Max} \quad z = -x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_I \geq 0 \end{cases}$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	0
Z	-1	1	0	0	0
x_3	1	5	3	1	2
x_4	1	-5	3	-1	1

Acertando a base temos:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	0
Z	-1	1	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0.5
x_4	-2	5	0	1	0.5

Portanto :

a) iteração 1

$I = \{3,4\} \quad J = \{1,2\}$

$$\left(A^I\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^I = [0 \quad 0]$$

Vetor multiplicador:

$$\pi = C^I (A^I)^{-1} = [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$C^1 = -1 - \pi \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \quad < 0$$

$$C^2 = 1 - \pi \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \quad > 0, \text{entra na base} \quad s = 2$$

$$A \quad = (A^I)^{-1} A^{2\prime} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} X_2 \qquad \text{saí } x_4 \text{ e } r = 2$$

Portanto P(r,s) = P(2,2)= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$

b) iteração 2

atualizações:

$I = \{3,2\} \quad J = \{1,4\}$

$$C^I = [0 \quad 1]$$

$$\pi = C^I (A^I)^{-1} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]$$

$$C^1 = -1 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

$$C^4 = 0 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1/5 \end{bmatrix} = -1/5 < 0$$

chegamos a situação ótima, sendo portanto:

$$\hat{} \, b = P(r,s)b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/10 \end{bmatrix}$$

logo :

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{10}$$

$$Z = 1/10$$

SRV.08 (data: 02.04.2018)

Inicialização:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$I = \{3, 5\} \quad c_I^T = \begin{bmatrix} 0 & 15 \end{bmatrix} \quad J = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$A^I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Iteração 1:

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \pi A^1 = 2 - \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = 5 - \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 7 - \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$\hat{c}_6 = c_6 - \pi A^6 = 14 - \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = -1$$

$$\hat{A}^1 = (A^I)^{-1} A^1 = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$P(r, s) = P(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1/3} & 0 \\ -\frac{1/3}{1/3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Atualização 1:

$$\hat{b}_{novo} = P(r, s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r, s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \{1, 5\} \quad c_I^T = \begin{bmatrix} 2 & 15 \end{bmatrix} \quad J = \{2, 3, 4, 6\}$$

Iteração 2:

$$\pi = c_I^T(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 15\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 & -4 \\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = 5 - \begin{bmatrix}-5 & 7\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 \\ 3\end{bmatrix} = -6$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 7 - \begin{bmatrix}-5 & 7\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} = -2$$

$$\hat{c}_6 = c_6 - \pi A^6 = 14 - \begin{bmatrix}-5 & 7\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 \\ 7\end{bmatrix} = -10$$

$$\hat{A}^6 = (A^I)^{-1}A^6 = \begin{bmatrix}5 & -4 \\ -1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 \\ 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 \\ 2\end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,6) = \begin{bmatrix}1 & -3/2 \\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

Atualização 2 :

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix}1 & -3/2 \\ 0 & 1/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}30 \\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}33 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3/2 \\ 0 & 1/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 & -4 \\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$I = \{1, 6\} \quad c_I^T = \begin{bmatrix}2 & 14\end{bmatrix} \quad J = \{2, 3, 4, 5\}$$

Iteração 3:

$$\pi = c_I^T(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 14\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \pi A^2 = 5 - \begin{bmatrix}-0 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 \\ 3\end{bmatrix} = -1$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 7 - \begin{bmatrix}-0 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} = 3$$

$$\hat{A}^2 = (A^I)^{-1}A^2 = \begin{bmatrix}7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 \\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2 \\ 1/2\end{bmatrix}$$

$$P(r,s) = P(2,2) = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Atualização 3:

$$\hat{b}_{novo} = P(r,s)\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^I)^{-1}_{novo} = P(r,s)(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \{1,2\} \quad c_I^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \quad J = \{3,4,5,6\}$$

Iteração 4:

$$\pi = c_I^T (A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_3 = c_3 - \pi A^3 = 0 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \pi A^4 = 7 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$

$$\hat{c}_5 = c_5 - \pi A^2 = 15 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 5$$

$$\hat{c}_6 = c_6 - \pi A^6 = 14 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2$$

Solução ótima:

X2 = 2
X1 = 34
X3 = X4 = X5 = X6 = 0

Lista – Dualidade (DLD)

DLD.1 (data: 10.05.2017)

Neste exercício é fornecido a formulação dual a partir da primal, para os itens a) e b). A partir da tabela disponível no Capítulo IV: Dualidade, pág.19, se obtiveram os seguintes resultados:

(a)

$$(P) = \begin{cases} \max & z = [4\ \ 1\ \ 5]^T\ x \\ s.a & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ livre},\ x_3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (D) = \begin{cases} \min & \phi = [10\ \ 11\ \ 12]^T\ w \\ & w_1 + 3w_2 + 5w_3 \geq 4 \\ s.a & w_1 + 4w_2 + 6w_3 = 1 \\ & 7w_1 + 8w_2 + 9w_3 \leq 5 \\ & w_1 \leq 0, w_2 \leq 0, w_3 \leq 0 \end{cases}$$

(b)

$$(P) = \begin{cases} \min & z = [2\ \ 3\ \ -5\ \ 0]^T\ x \\ s.a & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ & x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \text{ livre} \end{cases} \Rightarrow \quad (D) = \begin{cases} \max & \phi = [5\ \ 4\ \ 6]^T\ w \\ & w_1 + 2w_2 \geq 4 \\ s.a & w_1 + w_3 \leq 1 \\ & -w_1 + w_2 + w_3 \leq 5 \\ & w_1 + w_3 = 0 \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

DLD.3 (data: 13.05.2017)

a) Inicialmente será alterada a restrições do problema primal, ficando assim:

$$\begin{cases} \text{Min} \quad \Phi = -19w_1 - 57w_2 \\ \\ \text{s.a}\begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_3 = -10 \\ w_1 + 4w_2 + w_4 = -24 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_5 = -20 \\ 3w_1 + 2w_2 + w_6 = -20 \\ 5w_1 + w_2 + w_7 = -25 \end{cases} \end{cases}$$

$w_i \leq 0$

sendo o tableau

Base	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	-Z
Z	-19	-57	5	0	0	0	0	0
w_3	1	2	1	0	0	0	0	-10
w_4	1	4	0	1	0	0	0	-24
w_5	2	3	0	0	1	0	0	-20
w_6	3	2	0	0	0	1	0	-20
w_7	5	1	0	0	0	0	1	-25

Saí w_7 e entra w_1,

Base	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	-Z
Z	0	-53,2	0	0	0	0	3,8	-95
w_3	0	9/5	1	0	0	0	-1/5	-5
w_4	0	19/5	0	1	0	0	-1/5	-19
w_5	0	13/5	0	0	1	0	-2/5	-10
w_6	0	7/5	0	0	0	1	-3/5	-5
w_1	1	1/5	0	0	0	0	1/5	-5

Saí w_4 e entra w_2,

Base	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	-Z
Z	0	0	0	14	0	0	1,0	-361
w_3	0	0	1	-9/19	0	0	8/5	-13
w_2	0	1	0	5/19	0	0	-1/19	-5
w_5	0	0	0	-13/19	1	0	-5/19	3
w_6	0	0	0	-7/19	0	1	-44/95	2
w_1	1	0	0	-1/19	0	0	4/19	-4

Solução ótima com valor de :

$$w_1^* = -4 \quad w_2^* = -5 \quad Z^* = 361$$

como $w_i \leq 0$, podemos reescrever :

$$w_1^* = 4 \quad w_2^* = 5 \quad Z^* = 361$$

$$\Phi = 19w_1 + 57w_2$$

b) Podemos obter o valor de Pi no item anterior, sendo:

$$\Pi = [0 \quad 14 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

portanto:

$$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 14 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 0 \quad x_5^* = 1$$

$$Z^* = 361$$

DLD.4 (data: 06.05.2017)

Uma solução múltipla no primal implica que o problema dual não pode ter uma solução viável.

a) Se o custo ótimo do problema primal é $-\infty$, então o problema dual é inviável.
b) Se o custo ótimo do problema primal é $+\infty$, então o problema dual é inviável.

Explicação:

a) Suponha que o custo ótimo do problema primal seja $-\infty$ e que o problema dual tenha uma solução viável w.

Pelo teorema fraco da dualidade:

$c^T x \leq b^T w$, para toda solução viável primal.

Tomando o mínimo de todas as soluções viáveis primais x, teremos que:

$$b^T w \geq -\infty$$

Isso é impossível, o que mostra que o problema dual não pode ter uma solução viável.

b) Usando um argumento análogo, se o custo ótimo do problema primal é $+\infty$, então o problema dual é inviável.

DLD.5 (data: 04.05.2017)

Provar que o vetor multiplicador da solução ótima básica do problema primal é a solução do problema dual.

Prova: Considerando a partição de $A = [B,N]$, pode-se escrever que:

$$\begin{cases} \max & Bx_B + Nx_N = b \\ & C_B^T x_B + C_B^T\ x_N = Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \max & B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & C_B^T\ x_B + C_B^T\ x_N = Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \max & C_B^T\ B^{-1}x_B + C_B^T B^{-1}Nx_N = C_B^T\ B^{-1}b\ (I) \\ & C_B^T\ x_B + C_N^T\ x_N = Z\ (II) \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (II):

$$(C_B^T - W^T B)x_B + (C_N^T - W^T N)x_N = Z - W^T b$$

Se x é uma solução básica factível então:

$$x_B = B^{-1}b\ ; x_N = 0\ ; C_B^T - W^T B = 0$$

Existe alguma componente de custo relativo não básico $(C_N^T - W^T N)_i < 0$. Assim $(x_N)_i$ é uma variável não básica candidata a entrar na base. Se x é uma solução ótima para o problema primal, então: $x_B = B^{-1}b\ ; x_N = 0\ ; C_B^T - W^T B = 0$ e $(C_N^T - W^T N) \geq 0$ (hipótese). Assim, de $C_B^T - W^T B = 0$ e $(C_N^T - W^T N) \geq 0$ pode-se concluir que:

$$W^T[B,N] \leq [C_B^T, C_N^T] \Rightarrow$$

$$W^T A \leq C^T \Rightarrow$$

$$A^T W \leq c$$

Portanto, $W^T = C_B^T B^{-1}$ é ua solução básica factível dual. Como B é a base ótima do problema primal, não é mais possível haver trica de base, então $W^T = C_B^T B^{-1}$ é a solução ótima do problema dual. ■

DLD.8 (data: 02.07.2017)

min $z = -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 10x_7$

sujeito a

$x_1 - 2x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 - 4x_7 = 5$ (restrição relativa a w_1)
$x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 \geq -1$ (restrição relativa a w_2)
$5x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - 2x_7 \leq 5$ (restrição relativa a w_3)
$3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 2$ (restrição relativa a w_4)

com $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0; x_6 \leq 0; x_7$ livre trabalhando na restrição relativa a w_2, para deixar o lado direto da inequação positivo:

$-x_1 - 7x_4 + 2x_5 - 3x_6 + 3x_7 \leq 1$ (restrição relativa a w_2)

O dual correspondente é dado por:

max $\text{Ø} = 5w_1 + w_2 + 5w_3 + 2w_4$ (lado direito das restrições do primal definem [c] dual)

sujeito a

$w_1 - w_2 \leq -2$ (restrição relativa a x_1)
$-2w_1 + 5w_3 + 3w_4 \leq 13$ (restrição relativa a x_2)
$w_3 + w_4 \leq 3$ (restrição relativa a x_3)
$4w_1 - 7w_2 - w_3 + w_4 \leq -2$ (restrição relativa a x_4)
$-w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4 \leq 5$ (restrição relativa a x_5)
$w_1 - 3w_2 - w_3 + w_4 \geq 5$ (restrição relativa a x_6)
$-4w_1 + 3w_2 - 2w_3 - w_4 = 10$ (restrição relativa a x_7)
(lado direito das restrições do dual vêm do [c] primal)

w_1, w_4 irrestritas (pois as restrições primais relativas a w_1, w_4 são igualdades)
$w_2, w_3 \leq 0$ (pois suas restrições primais são $\leq$ valores não negativos)

Os sinais das restrições do dual dependem dos sinais das variáveis primais associadas: como x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 são ≥ 0, suas restrições têm sinal $\leq$; como $x_6 \leq 0$, sua restrição tem sinal $\geq$. E como x_7 é irrestrita, seu sinal é uma igualdade.

DLD.9 (data: 10.05.2017)

Neste exercício, pede-se para obter o dual do seguinte PL:

$$\begin{array}{rl}
\max & z = 88x_4 - 8x_5 \\
\text{s.a} & -x_1 + 14x_2 + 44x_3 + 13x_5 - 9x_6 \geq 203 \\
& 6x_3 - 22x_4 + 40x_7 \leq 81 \\
& 6x_1 - 7x_2 + x_6 = -13 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7
\end{array}$$

A formulação dual é feita abaixo:

$$(D) = \begin{array}{rl}
\min & \phi = 203w_1 + 81w_2 - 13w_3 \\
& -w_1 + 6w_3 \geq 0 \\
& 14w_1 - 7w_3 \geq 0 \\
& 44w_1 + 6w_2 \geq 0 \\
s.a & -22w_2 \geq 88 \\
& 13w_1 \geq -8 \\
& -9w_1 + w_3 \geq 0 \\
& 40w_2 \geq 0 \\
& w_1 \leq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \text{ irrestrita}
\end{array}$$

DLD.11 (data: 06.05.2017)

a) Para ajustar as restrições com variável x_3 livre e $x_2 \le 0$, as seguintes modificações devem ser feitas nas restrições:

Primal Min $Z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3$
Sujeito a:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad \ge -10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8 \quad \Rightarrow \quad -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge -8 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 6 \end{cases}$$

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-$$

Primal Min $Z = -x_1 - 2x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^-$
Sujeito a:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \quad \ge -10 & w_1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- \ge 8 & w_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- \ge -8 & w_3 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- \ge 6 & w_4 \end{cases}$$

logo o dual será: Max: $\Phi = -10w_1 + 8w_2 - 8w_3 + 6w_4$

$$\begin{cases} -2w_1 + w_2 - w_3 - w_4 \quad \le -1 \\ -w_1 - 3w_2 + 3w_3 - 2w_4 \le -2 \\ \quad -2w_2 + 2w_3 + 4w_4 \le 4 \\ \quad +2w_2 - 2w_3 - 4w_4 \le -4 \end{cases}$$

as duas últimas equações podem ser escritas em uma equação e multiplicando a primeira e a segunda por –1, temos:

Max: $\Phi = -10w_1 + 8w_2 - 8w_3 + 6w_4$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 2w_1 - w_2 + w_3 + w_4 \quad \ge 1 \\ w_1 + 3w_2 - 3w_3 + 2w_4 \ge 2 \\ \quad -2w_2 + 2w_3 + 4w_4 = 4 \\ w_1 \le 0,\ w_2 \ge 0, w_3 \le 0, w_4 \ge 0 \end{cases}$$

b) Como x_1 e x_2 são negativos, então, devemos primeiro acertar a função objetivo e as restrições antes de escrever o dual, ficando:

Primal: Max $Z = -3x_1 - 4x_2$
s.a:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 5 & w_1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -5 & w_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq -6 & w_3 \\ x_1 - x_2 \geq 10 & w_4 \end{cases}$$

portanto o dual pode ser escrito:

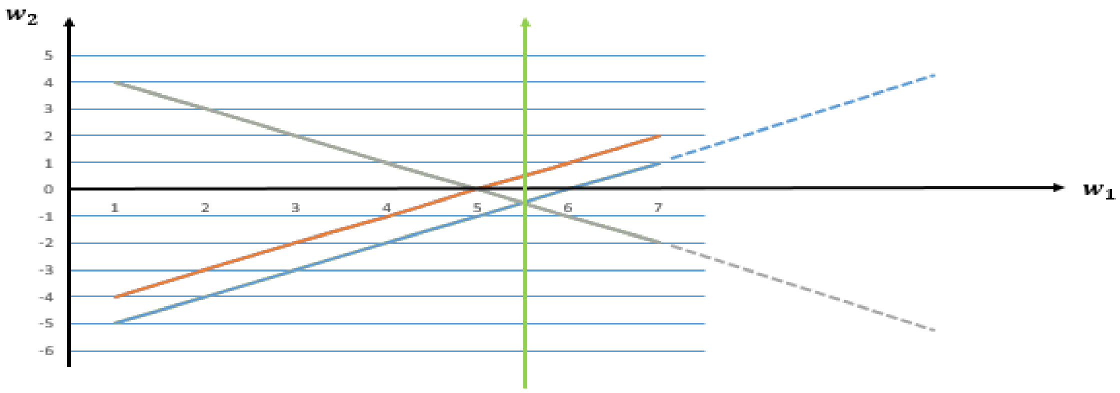
Min $\Phi = 5w_1 - 5w_2 - 6w_3 + 10w_4$

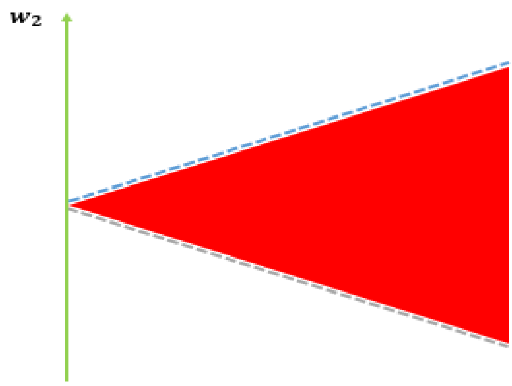
s.a $$\begin{cases} -2w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 \leq -3 \\ w_1 - w_2 + 2w_3 - w_4 \leq -4 \\ \\ w_i \geq 0 \end{cases}$$

DLD.12 (data: 06.05.2017)

$$
\begin{cases}
\text{min} \quad \phi = 10w_1 + 0w_2 \\
\\
\text{s a.} \quad w_1 - w_2 \geq 2 \\
\qquad\quad w_1 - w_2 \geq 1 \\
\qquad\quad w_1 + w_2 \geq 1 \\
\\
\qquad\quad w_2 \; ???
\end{cases}
$$

Gráfico com as restrições:





Tomando-se a interseção das 3 retas, observamos então pela figura acima a região de restrição, indicando que que a variável dual referente à segunda restrição (w_2) do problema apresentado será irrestrita.

DLD.13 (data: 04.05.2017)

Obtenha a formulação dual dos PL apresentados a seguir:

a) Problema 1:

Problema Primal

$$
\begin{array}{rl}
\min & z = x_1 + x_2 + x_5 - x_7 \\
\text{s.a} & 3x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \quad - x_6 \quad \geq 10 \\
& 3x_1 \quad + 3x_3 \quad + x_5 \quad + x_7 \leq 7 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Problema Dual

$$
\begin{array}{rl}
\min & \phi = 10w_1 + 7w_2 + 12w_3 \\
\text{s.a} & 3w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 1 \\
& -2w_1 \quad + w_3 \leq 1 \\
& 3w_2 + w_3 = 0 \\
& w_1 \quad + w_3 = 0 \\
& w_2 + w_3 \geq ;1 \\
& -w_1 \quad + w_3 \geq ;0 \\
& w_2 + w_3 \leq ; -1 \\
& w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \ irrestrito
\end{array}
$$

b) Problema 2:

Problema Primal

$$
\begin{array}{rl}
\max & z = -17x_2 + 83x_4 - 8x_5 \\
\text{s.a} & -x_1 - 13x_2 + 45x_3 \quad + 16x_5 - 7x_6 \quad \geq 107 \\
& 3x_3 - 18x_4 \quad + 30x_7 \leq 81 \\
& 4x_1 \quad - 5x_3 \quad + x_6 \quad = -13 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Problema Dual

$$
\begin{array}{rl}
\min & \phi = 107w_1 + 81w_2 - 13w_3 \\
\text{s.a} & -w_1 \quad + 4w_3 \geq 0 \\
& -13w_1 \quad \leq -17 \\
& 45w_1 + 3w_2 - 5w_3 \geq 0 \\
& -18w_2 \quad \leq 83 \\
& 16w_1 \quad + w_3 = -8 \\
& -7w_1 \quad \leq 0 \\
& 30w_2 \quad \leq 0 \\
& w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \ irrestrito
\end{array}
$$

DLD.15 (data: 10.07.2019)

(a) Para completar o quadro é necessário descobrir $\hat{b}$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

x_4	x_5	x_6	
$-M-2$	0	$-M$	$z-60$
1	0	0	30
1	1	-1	10

(b) A solução ótima é dada no quadro $z^* = 60$.
(c)

$$\hat{c}^2 = 4 + \Delta_2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \leq 0 \implies \Delta_2 \leq 1 \text{ (solução ótima não se altera.)}$$

Portanto, para que a solução ótima se altere é necessário que o aumento em c_2 seja estritamente maior do que 1.

DLD.17 (data: 02.07.2017)

max $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$2x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1 \leq 3$

com $x_1, x_2 \geq 0$

O dual correspondente é:

min $\varnothing = 8w_1 + 7w_2 + 3w_3$

sujeito a

$w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 1$
$2w_1 + w_2 \geq 1$

com $w_1, w_2, w_3 \geq 0$

Reescrevendo o primal com as variáveis de folga:

max $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 7$
$x_1 + x_5 = 3$

com $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

a) Pelo teorema da folga complementar, chamando de x^o os valores ótimos do primal e de w^o os ótimos do dual:

$x_1^o * (w_1^o + 2w_2^o + w_3^o - 1) = 0$ (1)
$x_2^o * (2w_1^o + w_2^o - 1) = 0$ (2)
$x_3^o * (w_1^o) = 0$ (3)
$x_4^o * (w_2^o) = 0$ (4)
$x_5^o * (w_3^o) = 0$ (5)

b) Do tableau primal, podemos obter diretamente as informações:

$x_1^o = 2; x_2^o = 3; x_5^o = 1$

da expressão (5) podemos concluir que $w_3^o = 0$, pois $x_5^o \neq 0$.

Da mesma maneira concluímos, por (1), que $w_1^o + 2w_2^o - 1 = 0$, pois $x_1^o \neq 0$ e $w_3^o = 0$.

Idem para (2) $\rightarrow 2w_1^o + w_2^o - 1 = 0$, pois $x_2^o \neq 0$.

Montamos então o sistema:

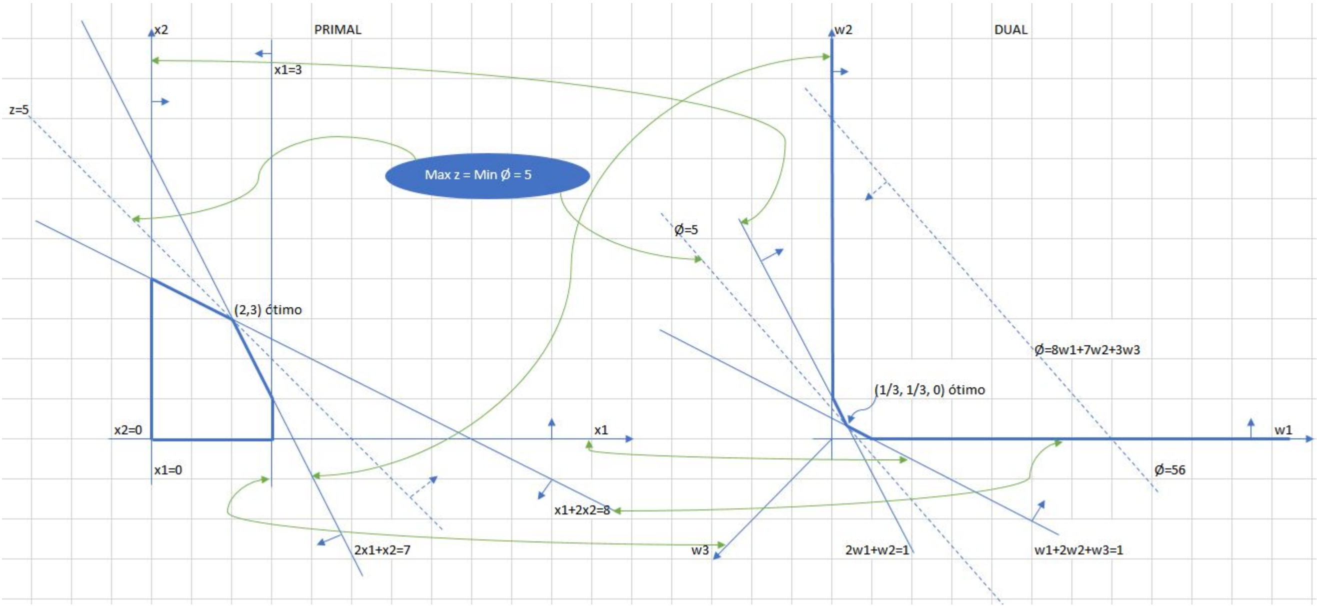
$w_1^o + 2w_2^o - 1 = 0$
$2w_1^o + w_2^o - 1 = 0$

de onde calculamos :

$w_1^o = 1/3$
$w_2^o = 1/3$
$w_3^o = 0$

c) O dual já foi obtido anteriormente.

Graficamente (pag. 5), as setas mostram a correspondência entre retas do primal e do dual, ou seja, entre as variáveis de um problema e as restrições do outro. Podemos também notar que as funções objetivo possuem sentidos opostos (max e min) e que nos pontos ótimos os valores de z e de Ø são exatamente os mesmos $(z = Ø = 5)$.
Obs: com o intuito de não poluir ainda mais o gráfico, o eixo w_3 do gráfico dual não possui valores.



Lista – Método Simplex com variáveis canalizadas (SVC)

SVC.1 (data: 04.05.2017)

Usar o método simplex para variáveis canalizadas na resolução do PL que segue

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & \quad x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & \quad 2x_1 + \ x_2 \leq 10 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 7 \end{array}$$

Como o exercício não específica o ponto de partirda, ou seja, o x°. Escoheu-se $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, ou seja, $x_1^{\circ} = 4$ e $x_2^{\circ} = 7$. Assim teremos o seguinte tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	Z
3	3	0	0	–
1	2	1	0	14
2	1	0	1	10
+	+			

Como estamos em um problema de maximização e o ponto de saída é justamente o limite superior de x_1 e x_2 já estamos no ótimo, pois $c_1 \geq 0$ e $c_2 \geq 0$. Então:

$$I = \{3,4\}$$
$$J = \{1,2\}$$
$$x_1^* = 4; x_2^* = 7$$

$$B : x_I^+ = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 4 - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} 7$$

$$x_I^+ = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$x_I^+ = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Assim $x_3^* = -4$ e $x_4^* = -5$

$$x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$$
$$\Rightarrow Z^* = 12 + 21$$
$$\Rightarrow Z^* = 33$$

SVC.2 (data: 06.05.2017)

$$\begin{cases} \text{max} & z = 3x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ \text{sa} & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & -2 \leq x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Maximizar $z = 3x_1 + 3x_2$ é o mesmo que minimizar $-z = -3x_1 - 3x_2$

Vamos então fazer $t = -3x_1 - 3x_2$, ou seja: $t = -z$

Pelo Bazaraa:

$$\begin{cases} \text{max} & t = -3x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ \text{sa} & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & -2 \leq x_2 \leq 6 \\ & x_3 \geq 0 \\ & x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Iniciando com os valores das variáveis em seus limites inferiores:

$$x_3 = 14 - x_1 - 2x_2 = 14 - (1) - (2)(-2) = 17$$
$$x_4 = 10 - 2x_1 - x_2 = 10 - (2)(1) - (-2) = 10$$
$$t = -3x_1 - 3x_2 = -3(1) - 3(-2) = 3$$

Iteração 1:

$\Downarrow$

	t	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	RHS
t	1	3	3	0	0	3
x3	0	1	2	1	0	17
x4	0	2	1	0	1	10

Valor máximo de $t_j - c_j = 3$ => x_1 e x_2 candidatas a entrar na base (escolha de x_2)

$x_k = x_2$ é incrementado

$$y_k = y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \min\left(\frac{\hat{b}_k - l_{B_k}}{y_{rk}}\right)$$, já que $y_k \neg \leq 0$

$$\gamma_1 = \min\left(\frac{17-0}{2}, \frac{10-0}{1}\right) = 8.5$$

$\gamma_2 = \infty$, já que $y_k \geq 0$

$$\Delta_2 = \min(\gamma_1, \gamma_2, u_k - l_k) = \min(8.5, \infty, 6-(-2))$$

$$\boxed{\Delta_2 = 8}$$

$$x_2 = x_2 + \Delta_2 = -2 + 8 = 6$$

$$\boxed{x_2 = 6}$$

O tableau não muda, somente $\hat{t}$ e $\hat{b}$ devem ser atualizados

$$\hat{t} = \hat{t} - (t_k - c_k)\Delta_k = \hat{t} - (t_2 - c_2)(\Delta_2) = 3 - (3)(8) = -21$$

$$\hat{b} = \hat{b} - y_k\Delta_k = \hat{b} - y_2\Delta_2 = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(8) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Iteração 1</u>:

$\Downarrow$ *u*

	t	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	RHS
t	1	3	3	0	0	-21
x3	0	**1**	2	1	0	1
x4	0	2	1	0	1	2

Valor máximo de $t_j - c_j = 3$ => x_1 candidata a entrar na base

$x_k = x_1$ é incrementado

$$y_k = y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \min\left(\frac{\hat{b}_k - l_{B_k}}{y_{rk}}\right)$$, já que $y_k \neg \leq 0$

$$\gamma_1 = \min\left(\frac{1-0}{1}, \frac{2-0}{2}\right) = 1$$

$\gamma_2 = \infty$, já que $y_k \geq 0$

$$\Delta_1 = \min(\gamma_1, \gamma_2, u_k - l_k) = \min(1, \infty, 7-1)$$

$$\boxed{\Delta_1 = 1}$$

$$x_1 = x_1 + \Delta_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

x_1 entra na base

x_4 sai da base

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \hat{b} - y_k \Delta_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{t} = \hat{t} - (t_k - c_k) = \Delta_k = \hat{t} - (t_1 - c_1)(\Delta_1) = -21 - (3)(1) = -24$$

		u	*u*			
	t	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	RHS
t	1	0	0	-3	0	-24
x3	0	1	2	1	0	0
x1	0	0	-3	-2	1	0

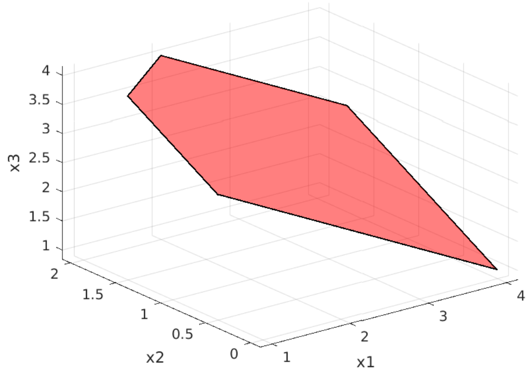
Como as variáveis não básicas atingiram seus limites superiores, o tableau já está otimizado.

Portanto:

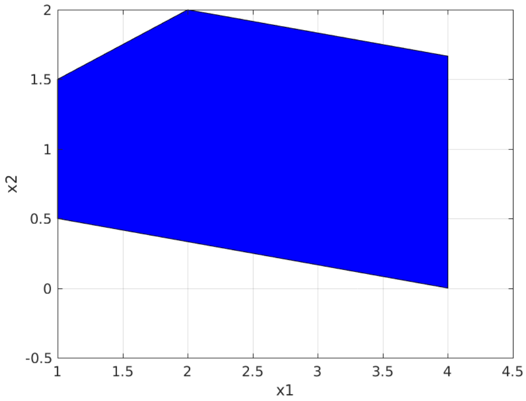
$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a função objetivo tem valor: $t^* = -3x_1^* - 3x_2^* = -3(2) - 3(6) = -24$

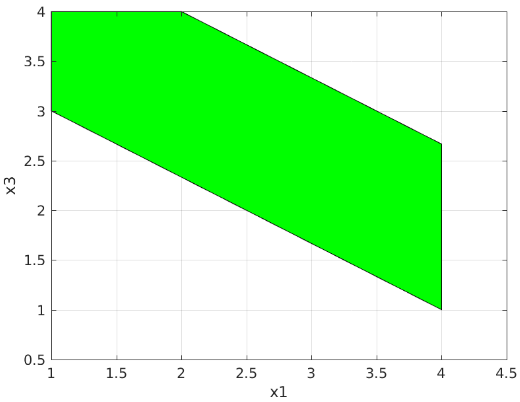
Como $t = -z$ => $\boxed{z^* = 24}$



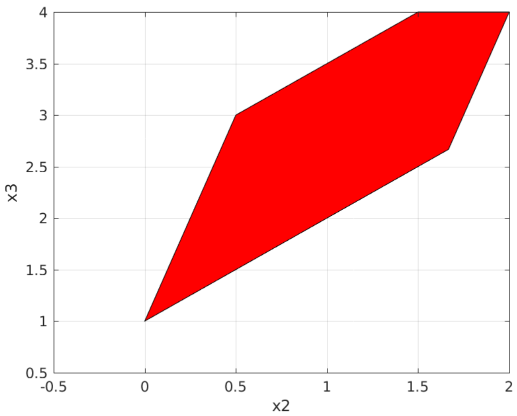
(a) Região factível no $\mathbb{R}^3$.



(b) Região factível no plano $x_1 \times x_2$.



(c) Região factível no plano $x_1 \times x_3$.



(d) Região factível no plano $x_2 \times x_3$.

Figura 5: Região factível do problema SVC.3.

SVC.3 (data: 10.07.2019)

Da primeira restrição obtém-se: $x_4 = 10 - x_1 - 2x_2 - x_3$. Subtituindo essa relação nas canalizações de x_4, obtêm-se as desigualdades

$$\begin{array}{l} 10 - x_1 - 2x_2 - x3 \geq 0 \\ 10 - x_1 - 2x_2 - x3 \leq 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x3 \leq 10 \\ -x_1 - 2x_2 - x3 \leq -5 \end{array}$$

Assim o problema original pode ser reescrito na forma (a segunda restrição é transformada em duas desigualdades)

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -5 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -6 \\ & 1 \leq x_1 \leq 4, \ -5 \leq x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \end{array}$$

A região factível no $\mathbb{R}^3$ e nos planos $x_1 \times x_2$, $x_1 \times x_3$ e $x_2 \times x_3$ são mostradas na Figura5.

SVC.9 (data: 10.05.2017)

Neste exercício será utilizado o Método do Simplex Canalizado para resolver o seguinte PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 10x_1 + 16x_2 - 10x_3 + 24x_4 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 10 \\ & 0 \leq x_i \leq 2,\ i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

<u>Resolução:</u>

Colocando o problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 10x_1 + 16x_2 - 10x_3 + 24x_4 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 10 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 10 \\ & 0 \leq x_i \leq 2,\ i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Iteração 1

Supondo que todas as variáveis inicialmente valem zero. Colocando o problema no Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
10	16	−10	24	0	0	−
2	2	1	2	1	0	10
1	2	−3	4	0	1	10

$\Rightarrow$ escolhendo x_4 para entrar na base.

- <u>NB:</u> $x_4 = x_4^+ + \varepsilon \rightarrow x_4^+ = 0 + \varepsilon \rightarrow \boxed{\varepsilon = 2}$
- <u>B:</u> $x_I = x_I^+ - \hat{A}^j \varepsilon =$

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (0) - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (0) - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} (0) - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} (0 + \varepsilon) \quad \therefore \text{ fica}$$

$$\begin{matrix} 0 = 10 - 2\varepsilon \\ 0 = 10 - 4\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \varepsilon = 5 \\ \varepsilon = 2,5 \end{matrix}$$

- OBS:A variável NB x_4 permaneceu NB. Solução factível:$[0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 6 \ \ 2]^T$.

Iteração 2

Seja o Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
10	16	−10	24	0	0	−
2	2	1	2	1	0	10
1	2	−3	4	0	1	10

$\Rightarrow$ escolhendo x_2 para entrar na base.

- <u>NB:</u> $x_2 = x_2^+ + \varepsilon x_2^+ = 0 + \varepsilon \rightarrow \varepsilon = 2$

- B: $x_I = x_I^+ - \hat{A}^j \varepsilon =$

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(0) - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(0+\varepsilon) - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}(0) - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}(2) \quad \therefore \text{ fica}$$

$$\begin{array}{l} 0 = 6 - 2\varepsilon \\ 0 = 2 - 2\varepsilon \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon = 3 \\ \boxed{\varepsilon = 1} \end{array}$$

- OBS: $s = 4$ e $r = 1$. Pivoteando, obtém-se o Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
-6	0	-18	8	-8	0	-80
1	1	$1/2$	1	$1/2$	0	5
-1	0	-4	2	-1	1	0

$\Rightarrow$ com $x = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 0]^T$

Tableau atualizado:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
-6	0	-18	8	-8	0	-80
1	1	$1/2$	1	$1/2$	0	5
-1	0	-4	2	-1	1	0

$\Rightarrow$ com $x^* = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 0]^T$

SVC.10 (data: 02.07.2017)

Preparando o problema com variáveis de folga e deixando o lado direito das restrições positivo:

max $z = 2x_1 + 2x_2$

sujeito a

$-x_1 + x_2 + x_3 = 10$
$x_1 - x_2 + x_4 = 10$

$-8 \leq x_1 \leq 8$
$-15 \leq x_2 \leq 15$

$x_3, x_4 \geq 0$

Primeira iteração $\qquad I = \{3,4\}$

$\downarrow$			$\uparrow$	
x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
2	2	0	0	0
-1	1	1	0	10
1	-1	0	1	10
$\ominus$	$\ominus$			

Tanto x_1 quanto x_2 estão em seus valores mínimos, $x_1^0 = -8$ e $x_2^0 = -15$ (dados do problema). Escolheremos x_1 para entrar na base.

Variáveis não básicas: $x_1 + \varepsilon = 8 \rightarrow -8 + \varepsilon = 8 \rightarrow \varepsilon = 16$

Variáveis básicas:

$$\begin{bmatrix} x_3^+ \\ x_4^+ \end{bmatrix} = \hat{b} - [\hat{A}^1 \mid \hat{A}^2] \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^+ \\ x_4^+ \end{bmatrix} - \hat{A}^1 * \varepsilon = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} * \varepsilon = \begin{bmatrix} 17 + \varepsilon \\ 3 - \varepsilon \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ilimitado \\ 3 - \varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = 3 \end{bmatrix}$$

O bloqueio ocorre em $\varepsilon = 3$, portanto a variável que sairá da base será x_4.

Segunda iteração $\qquad I = \{3, 1\}$

$\uparrow$	$\downarrow$			
x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	4	0	-2	-20
0	0	1	1	20
1	**-1**	0	1	10
	$\ominus$		$\ominus$	

Variáveis não básicas: $x_2 + \varepsilon = 15 \rightarrow -15 + \varepsilon = 15 \rightarrow \varepsilon = 30$

Variáveis básicas:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} * (-15 + \varepsilon) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} * 0 = \begin{bmatrix} 20 \\ -5 + \varepsilon \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} indiferente \\ -5 + \varepsilon = 8 \rightarrow \varepsilon = 13 \end{bmatrix}$$

O bloqueio ocorre em $\varepsilon = 13$, portanto a variável que sairá da base será x_1. A variável x_2 entra na base.

Terceira iteração $\qquad I = \{3, 2\}$

	$\uparrow$		$\downarrow$	
x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
4	0	0	2	20
0	0	1	1	20
-1	1	0	**-1**	-10
$\oplus$			$\ominus$	

Variáveis não básicas: $x_4 + \varepsilon = \infty \rightarrow \varepsilon = ilimitado$

Variáveis básicas:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} * 8 - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} * (0+\varepsilon) = \begin{bmatrix} 20-\varepsilon \\ -2+\varepsilon \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon = 20 \\ \varepsilon = 17 \end{bmatrix}$$

O bloqueio ocorre em $\varepsilon = 17$, portanto a variável que sairá da base será x_2. A variável x_4 entra na base.

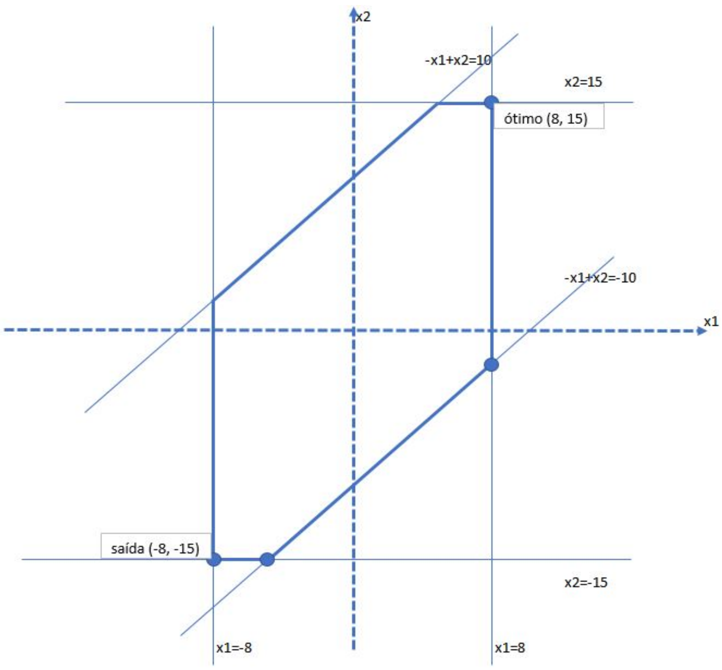
Quarta iteração $I = \{3,4\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
2	2	0	0	0
-1	1	1	0	10
1	-1	0	1	10
$\oplus$	$\oplus$			

x_1 e x_2 estão nos seus valores máximos, portanto a solução é ótima.

$x_1^* = 8; x_2^* = 15; z^* = 2*8+2*15 \rightarrow z^* = 46$

Graficamente, temos:



Lista – Análise de Sensibilidade (AS)

AS.2 (data: 10.07.2019)

a) i) $8A^3 - 2A^8 = 8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = A^1$

ii) $32A^3 + 8A^8 = 32\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}32\\32\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}16\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}48\\40\end{bmatrix} = b$

iii) $4A^1 + 16A^8 = 4\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + 16\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\24\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}32\\16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}48\\40\end{bmatrix} = b$

b) Colocando o tableau na forma prepara para a base $I = \{8,1\}$ temos

0	7/8	-1/8	13/8	-1/2	-5/8	9/4	0	z-92
0	5/4	1/4	7/4	-1	-15/4	11/2	1	16
1	9/8	1/8	11/8	7/2	21/8	-1/4	0	4

Com a base $I = \{8,1\}$ e o tableau na forma preparada temos que $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$, $x_8 = 16$ e $x_1 = 4$. Verificando as restrições 1 e 2 temos que

$$4x_1 + 2x_8 = 16 + 32 = 48 = b_1$$

$$6x_1 + x_8 = 24 + 16 = 40 = b_2.$$

Logo, a base $I = \{8,1\}$ é factível.

c) Temos que $\pi = [1\ 1]$ é o vetor de variáveis duais associadas as retrições duais, então $w_1 = w_2 = 1$. Então

$$4w_1 + 7w_2 < 11$$

$$7w_1 + 8w_2 < 17$$

$$w_1 + w_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{folga dual} = 0$$

$$9w_1 + 10w_2 < 22$$

$$12w_1 + 20w_2 < 35$$

$$3w_1 + 12w_2 < 17$$

$$10w_1 + 4w_2 < 16$$

$$2w_1 + w_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{folga dual} = 0.$$

Logo, $\pi = [1\ 1]$ corresponde a base $I = \{8,3\}$. Colocando o tableau na forma preparada para a base $I = \{8,3\}$, temos

1	2	0	3	3	2	2	0	z-88
-2	-1	0	-1	-8	3/2	6	1	8
8	9	1	11	28	21	-2	0	32

Como todos os valores de custos relativos são ≥ 0, então o quadro é ótimo. Além disso, do quadro ótimo temos que $x_8^* = 8$, $x_3^* = 32$ e valor da função objetivo é $z^* = 88$.

d) Mudando $c_1 = 11$ para $c_1 = 8$, temo que

$$\hat{c}_1 = c_1 - \pi A_1 = 8 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = -2 < 0.$$

Ou seja, o tableau deixa de ser ótimo.

Assim, x_1 entra na base e x_3 sai da base. Fazendo o pivotamento obtemos o seguinte tableau

0	17/4	1/4	23/4	10	29/4	3/2	0	z-80
0	5/4	1/4	7/4	-1	27/4	11/2	1	16
1	9/8	1/8	11/8	7/2	21/8	-1/4	0	4

O tableau obtido após o pivotamento tem todos os custos relativos positivos, portanto estamos na solução ótima dada por

$$x_1^* = 4, \quad x_8^* = 16, \quad z^* = 80$$

AS.5 (data: 04.05.2017)

a) Determinar a produção diária de cada produto com o objetivo de maximizar o lucro, sabendo que toda a produção será vendida.

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\
& 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\
& x_1 + 4x_2 \leq 420 \\
& x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 3
\end{aligned}$$

Forma padrão:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 430 \\
& 3x_1 + 2x_3 + x_5 = 460 \\
& x_1 + 4x_2 + x_6 = 420 \\
& x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}$$

No Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
-3	-2	-5	0	0	0	0
1	2	1	1	0	0	430
3	0	2	0	1	0	460
1	4	0	0	0	1	420

Aqui temos $I = \{4, 5, 6\}$. Note que x_3 entra na base no lugar de x_5.

Iteração 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
$9/2$	-2	0	0	$5/2$	0	1150
$-1/2$	2	0	1	$-1/2$	0	200
$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
1	4	0	0	0	1	420

Nesta etapa obtemos nova base $I = \{4,3,6\}$. Entrará x_2 no lugar de x_4.

Iteração 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
$7/2$	0	0	1	2	0	1350
$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
2	0	0	-2	1	1	20

Obtemos a base $I = \{2,3,6\}$. Chegamos no ótimo!

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 230 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = 1350$$

b) Supor que desejamos aumentar a capacidade de produção da fábrica e que o custo de expansão de cada um dos três setores da fabricação, responsáveis pelas três operações, é o mesmo. Qual dos três setores é prioritário com respeito ao plano de expansão? Analisar, para cada setor, a importância ou não da expansão.

$$Z = \pi \cdot b$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 + \Delta b_1 \\ 230 + \Delta b_2 \\ 20 + \Delta b_3 \end{bmatrix}$$

$$Z = 1 \cdot (100 + \Delta b_1) + 2 \cdot (230 + \Delta b_2) + 0 \cdot (20 + \Delta b_3)$$

Note que o setor 3 não irá influemciar no plano de expansão, quem tem influência são os setores 1 e 2. Porém o prioritário com respeito ao plano de expansão é o setor 2 como observado.

c) Supor que os produtos tenham de ser submetidos a uma quarta operação. A capacidade máxima disponível para a quarta operação é de 600 minutos/dia. Sabemos que se fosse fabricado somente um tipo de produto, poderíamos produzir no quarto setor no máximo 100 unidades do produto 1 ou 200 unidades do produto 2 ou 600 unidades do produto 3. Determine a nova solução ótima.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-Z$
$7/2$	0	0	1	2	0	0	1350
$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	0	100
$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0	230
2	0	0	-2	1	1	0	20
6	3	1	0	0	0	1	600

Vamos preparar a nova linha que foi inserida, faremos $-3 \cdot L_1 + L_4$. Sabendo que L_1 e L_4 correspondem respectivamente as linhas 1 e 4 do Tabbleau.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-Z$
$3/4$	-3	0	$-3/2$	$3/4$	0	0	-300
6	3	1	0	0	0	1	600

Então teremos o seguinte:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-Z$
$27/4$	0	1	$-3/2$	$3/4$	0	0	-300

Agora faremos $L_4 - L_2$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-Z$
$27/4$	0	1	$-3/2$	$3/4$	0	0	-300
$-3/2$	0	-1	0	$-1/2$	0	0	-230

Teremos o seguinte:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-Z$
$21/4$	0	0	$-3/2$	$1/4$	0	1	70

Note que continuamos no ótimo!! Outra maneira de verificarmos, já que possuímos o valor de x^* é substituir o valor ótimo nesta restrição e observar o comportamento da desigualdade.

Lembrando que a nova restrição a ser inserida é $6x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 600$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 230 \end{bmatrix}$$

$$6 \cdot 0 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 230 = 530$$

$$530 \leq 600$$

d) Formular o dual do problema dado e determinar sua solução sem resolvê-lo.

$$\begin{array}{rl} \min & \phi = 430w_1 + 460w_2 + 420w_3 \\ \text{s.a} & w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 3 \\ & 2w_1 + 4w_3 \geq 2 \\ & w_1 + 2w_2 \geq 5 \\ & w_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

Vamos utilizar o Teorema das folgas complementares para resolver este problema.

$$x_1^* \cdot (w_1^* + 3w_2^* + w_3^* - 3) = 0 \tag{9}$$

$$x_2^* \cdot (2w_1^* + 4w_3^* - 2) = 0 \tag{10}$$

$$x_3^* \cdot (w_1^* + 2w_2^* - 5) = 0 \tag{11}$$

Pelo item 'a', deste exercício, obtivemos $x_1^* = 0$, $x_2^* = 100$ e $x_3^* = 230$, sendo assim teremos a seguinte relação:

$$w_1^* + 3w_2^* + w_3^* \leq 3 \tag{12}$$

$$2w_1^* + 4w_3^* = 2 \tag{13}$$

$$w_1^* + 2w_2^* = 5 \tag{14}$$

Assim de (5) e (6) obtemos:

$$w_1^* = 1 - 2w_3^* \tag{15}$$

$$w_2^* = 1/2 \cdot (5 - w_1^*) \tag{16}$$

Como já sabemos o valor de x_1^*, x_2^* e x_3^*, voltemos para o primal:

$$w_1^* \cdot (x_1^* + 2x_2^* + x_3^* - 430) = 0 \tag{17}$$

$$w_2^* \cdot (3x_1^* + 2x_3^* - 460) = 0 \tag{18}$$

$$w_3^* \cdot (x_1^* + 4x_2^* - 420) = 0 \tag{19}$$

Vamos inserir os valores de x_1^*, x_2^* e x_3^* em (9), (10) e (11):

$$w_1^* \cdot (0 + 2 \cdot 100 + 230 - 430) = 0 \tag{20}$$

$$w_2^* \cdot (3 \cdot 0 + 2 \cdot 230 - 460) = 0 \tag{21}$$

$$w_3^* \cdot (0 + 4 \cdot 100 - 420) = 0 \tag{22}$$

Nota-se que em (12) $w_1^* \neq 0$, em (13) $w_2^* \neq 0$ e em (14) $w_3^* = 0$.
Substituindo o valor de w_3^* em (7) teremos:

$$w_1^* = 1 - 2 \cdot 0 \Rightarrow w_1^* = 1$$

Agora substituiremos o valor de w_1^* em (8):

$$w_2^* = 1/2 \cdot (5 - 1) \Rightarrow w_2^* = 4/2 \Rightarrow w_2^* = 2$$

Logo

$$\phi = 430 \cdot 1 + 460 \cdot 2 + 420 \cdot 0 \Rightarrow \phi = 1350$$

e) Supor que aumentamos a capacidade do setor 1 de 20 minutos, isto é, passamos a ter 450 minutos/dia disponíveis para a operação 1. A solução continuaria a ser a mesma? Por quê? No caso da solução ser diferente, determinar a nova solução ótima.

$$\begin{array}{rl} \max & z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \le 450 \\ & 3x_1 \qquad\ \ + 2x_3 \le 460 \\ & x_1 + 4x_2 \qquad\quad \le 420 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

Forma padrão:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + x_4 \qquad\qquad = 450 \\ & 3x_1 \qquad\ \ + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad = 460 \\ & x_1 + 4x_2 \qquad\qquad\qquad\quad + x_6 = 420 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

No Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
-3	-2	-5	0	0	0	0
1	2	1	1	0	0	450
3	0	2	0	1	0	460
1	4	0	0	0	1	420

Aqui temos $I = \{4, 5, 6\}$. Note que x_3 entra na base no lugar de x_5.

Iteração 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
$9/2$	-2	0	0	$5/2$	0	1150
$-1/2$	2	0	1	$-1/2$	0	220
$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
1	4	0	0	0	1	420

Nesta etapa obtemos nova base $I = \{4, 3, 6\}$. Entrará x_2 no lugar de x_6.

Iteração 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$
5	0	0	0	$5/2$	$1/2$	1360
-1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	10
$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
$1/4$	1	0	0	0	$1/4$	105

Obtemos a base $I = \{4,3,2\}$. Chegamos no ótimo!

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 105 \\ 230 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = 1360$$

AS.10 (data: 10.07.2019)

(a) Ao adicionar a variável x_9, com coeficientes $[2,0,3]^T$ nas restrições e preço $c_9 = 5$, basta calcular $\hat{A}_9$, $\hat{c}_9$, adicionar no quadro e continuar a otimização. Assim

$$\hat{A}_9 = (A^I)^{-1}A_9 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{-3}{10} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-1}{2} \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_9 = c_9 - \pi^T A_9 = 5 - \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{10} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 - 10 = -5$$

Como $\hat{c}_9 = -5 \leq 0$, o quadro continua ótimo e portanto a solução não se altera.

(b) Para saber de quanto pode crescer b_1 (recursos da primeira restrição) sem violar a factibilidade, primeiro temos que descobrir quem é o vetor b. Assim,

$$\hat{b} = (A^I)^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{-3}{10} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}b_1 & +\frac{1}{5}b_2 & -b_3 & = 3 \\ -b_1 & & +\frac{1}{2}b_3 & = 1 \\ 5b_1 & -\frac{3}{10}b_2 & 2b_3 & = 7 \end{cases} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para que a soluçãop seja factível é necessário $b \geq 0$, então

$$0 \leq \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{-3}{10} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 50 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}b_1 & +10 & -4 & \geq 0 \\ -b_1 & & +2 & \geq 0 \\ 5b_1 & -15 & +8 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \geq -16 \\ b_1 \leq 2 \\ b_1 \geq \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{5} \leq b_1 \leq 2.$$

Como $b_1 = 1$ e temos que $\frac{7}{5} \leq b_1 \leq 2$, então b_1 pode aumentar até 2 e, dessa forma b_1 pode crescer 1 sem violar a factibilidade.

(c) Ao adicionar a variável x_9, com coeficientes $[2,0,3]^T$ nas restrições e preço $c_9 = 14$, basta calcular $\hat{A}_9$, $\hat{c}_9$, adicionar no quadro e continuar a otimização. Assim

$$\hat{A}_9 = (A^I)^{-1}A_9 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{-3}{10} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-1}{2} \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_9 = c_9 - \pi^T A_9 = 14 - \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{10} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 14 - 10 = 4$$

Como $\hat{c}_9 = 4 > 0$, o quadro deixa de ser ótimo, então inserimos $\hat{A}_9$ e $\hat{c}_9$ no quadro e continuamos a otimização. Ou seja,

0	0	0	-2	0	-2	-1/10	-2	4	z-17
1	0	0	-1	0	1/2	1/5	-1	-2	3
0	1	0	2	1	-1	0	1/2	-1/2	1
0	0	1	-1	-2	5	-3/10	2	16	7

Do quadro anterior temos que, x_9 entra na base e x_3 sai da base. Após o pivoteamento obtemos o seguinte quadro

0	0	-1/4	-7/4	1/2	-13/4	-1/40	-5/2	0	z-75/4
1	0	1/8	-9/8	-1/4	9/8	13/80	3/4	0	31/8
0	1	1/32	63/32	15/16	-27/32	-3/320	9/16	0	39/32
0	0	1/16	-1/16	-1/8	5/16	-3/160	1/8	1	7/16

Do quadro anterior temos que, x_5 entra na base e x_2 sai da base. Após o pivoteamento obtemos o seguinte quadro

0	-8/15	-4/15	-14/5	0	-149/30	-1/50	-14/5	0	z-97/5
1	4/15	2/15	-3/5	0	9/10	4/25	9/10	0	63/15
0	16/15	1/30	21/10	1	-9/10	-1/100	3/5	0	13/10
0	2/15	1/15	1/5	0	1/5	-1/50	1/5	1	3/5

Como todos os custos relativo das variáveis não básicas são não positivos, então o quadro é ótimo. Assim, $x_1^8 = \frac{63}{15}$, $x_5^8 = \frac{63}{10}$, $x_9^8 = \frac{3}{5}$ e $z^* = \frac{97}{5}$.

(d) Considerando o quadro do exercício anterior e adicionando a restrição $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$, obtemos o seguinte quadro

0	-6	0	-1/3	-5/3	0	z-9
0	-1	1	1/3	-1/3	0	1
1	3	0	1/3	2/3	0	5
1	-1	2	0	0	1	10

Colocando o quadro na forma preparada para a base $I = \{3, 1, 6\}$, obtemos

0	-6	0	-1/3	-5/3	0	z-9
0	-1	1	1/3	-1/3	0	1
1	3	0	1/3	2/3	0	5
0	-2	0	-1	0	1	3

Após isso, temos que o quadro continua ótimo e a solução ótima é dada por $x_1^* = 5$, $x_3^* = 1$, $x_6^* = 3$ e $x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0$ a qual satisfaz a restrição adicionada

AS.14 (data: 10.07.2019)

(a)
- x_1 = Kl da aguardente tipo I,
- x_2 = Kl da aguardente tipo II,
- x_3 = Kl da aguardente tipo III,
- x_4 = Matéria Prima (ton/Kl) não utilizada (variável de folga),
- x_5 = Area (m^2/Kl) não utilizada (variável de folga),

- x_6 = Mão de Obra $(H-H/Kl)$ superior a 300 homens-horas $(H-H)$ (variável de folga),
- f = lucro $(\$Kl)$.

(b) Sim, nota-se que a variável não-básica, x_6, apresenta valor 0 na linha z. Como os valores na linha z representam a melhoria da função objetivo decorrente da entrada de cada variável não-básica na base, então ao introduzir x_6 na base o valor da função objetiva não se altera. Desta forma, vamos acrescentar x_6 na base e obter uma solução alternativa, sem alterar o valor da função objetivo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-1	0	0	0	-5	0	$z-710$
$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	70
$\frac{2}{3}$	0	1	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	36
2	0	0	1	1	1	18

(c) Como a variável x_6 representa a quantidade de mão de obra superior a $(300H-H)$, alteramos a função objetiva subtraindo o prêmio de $\$/H-H$. Temos então a nova função objetiva:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & z = 9x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_6 \\ s.a \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 176 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 142 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_6 = 300 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6 \end{aligned} \tag{23}$$

Como x_6 é não básica:

$$\hat{c}_6 = c_6 - \pi A^6$$

$$\hat{c}_6 = -1 - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{-1} \end{bmatrix} = -1$$

E o novo tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-1	0	0	0	-5	-1	$z-710$
-$\frac{2}{3}$	1	0	0	-1	-$\frac{2}{3}$	70
$\frac{4}{3}$	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	36
2	0	0	1	1	1	18

Nota-se que a solução ótima permaneceu 710 $\$Kl$.

(d) Vamos eliminar a segunda restrição e transformamos no problema de minimização para aplicar o dual-simplex, temos então um novo tableau inicial e vamos realizar o pivoteamento com a linha de bloqueio $r=2$:

		$\downarrow$				
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
-9	-5	-10	0	0	$z+0$	
2	2	1	1	0	176	
2	3	**3**	0	-1	300	$\leftarrow$

Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r=1$

			$\downarrow$			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
-$\frac{17}{3}$	0	-5	0	-$\frac{5}{3}$	$z+500$	
$\frac{2}{3}$	0	-1	1	$\frac{2}{3}$	-24	$\leftarrow$
$\frac{2}{3}$	1	**1**	0	-$\frac{1}{3}$	100	

Temos o novo tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-9	0	0	-5	-5	$z+620$
$-\frac{2}{3}$	0	1	-1	$-\frac{2}{3}$	24
$\frac{4}{3}$	1	0	1	$\frac{1}{3}$	76

(e) A adição de uma nova atvidade x_7, inclui calcular $\hat{A}^7$, $\hat{c}_7$ e continuar a otimização.

$$\hat{A}^7 = (A^I)^{-1}A^7$$

$$\hat{A}^7 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_7 = c_7 - \pi A^7$$

$$\hat{c}_6 = 6 - \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = -4$$

E o novo tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-1	0	0	0	-5	0	-4	$z-710$
$-\frac{2}{3}$	1	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	-4	58
$\frac{4}{3}$	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	3	42
2	0	0	1	1	1	6	18

Nota-se que ao incluir a nova atividade a solução ótima permaneceu 710 $\$Kl$ não sendo vantajosa a adição da nova planta.

(f)
- letra (b)
  O novo $\hat{b}$ fica:

$$\hat{b} = (A^I)^{-1}b$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 130 \\ 142 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -342 \\ 242 \\ 572 \end{bmatrix}$$

Como $\hat{b} < 0$, continuamos a otimização utilizando o dual-simplex. Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 1$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow$ x_6		
-1	0	0	0	-5	0	$z-710$	
$-\frac{2}{3}$	1	0	0	-1	$-\mathbf{\frac{2}{3}}$	-342	$\leftarrow$
$\frac{4}{3}$	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	242	
2	0	0	1	1	1	572	

Chegamos ao novo tableau ótimo.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-1	0	0	0	-5	0	$z-710$
1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	513
1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	71
1	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	59

Nota-se que a queda brusca da matéria-prima não alterou a solução ótima.

- letra (c)
  O novo $\hat{b}$ fica:

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 130 \\ 142 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -342 \\ 242 \\ 572 \end{bmatrix}$$

Como $\hat{b} < 0$, continuamos a otimização utilizando o dual-simplex. Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 1$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow$ x_6		
-1	0	0	0	-5	-1	$z - 710$	
$-\frac{2}{3}$	1	0	0	-1	$-\mathbf{\frac{2}{3}}$	-342	$\leftarrow$
$\frac{4}{3}$	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	242	
2	0	0	1	1	1	572	

Chegamos ao novo tableau ótimo.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{7}{2}$	0	$z - 197$
1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	513
1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	71
1	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	59

Nota-se que neste caso a solução ótima caiu de 710 para 197 com a queda brusca da matéria-prima.

(g)
- a nova solução
  x_1 é não básica, logo novo $\hat{c}_1$ fica:

$$\hat{c}_1 = c_1 - \pi A^1$$

$$\hat{c}_1 = 15 - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

Como $c_1 > 0$, continuamos a otimização. Temos um novo tableau e vamos realizar o pivoteamento com linha de bloqueio $r = 3$:

$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
5	0	0	0	-5	0	$z - 710$	
$-\frac{2}{3}$	1	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	58	
$\frac{4}{3}$	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	42	
2	0	0	1	1	1	18	$\leftarrow$

Temos o novo tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$z - 755$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9

x_2 é básica, logo $\Delta c_1 = 7 - 5 = 2$. Multiplicamos a linha $r = 1$ por 2 e somamos na linha dos custos relativos (menos x_1). Temos o novo tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{53}{6}$	$-\frac{19}{6}$	$z-883$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9

x_3 é básica, logo $\Delta c_3 = 11 - 10 = 1$. Multiplicamos a linha $r = 2$ por 1 e somamos na linha dos custos relativos (menos x_3). Temos o novo tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	$-\frac{15}{6}$	$-\frac{51}{6}$	$-\frac{21}{6}$	$z-913$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9

- valores de I, (A^I), $(A^I)^{-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial b_1}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial b_2}$

$I = \{2,3,1\}$, $(A^I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = \pi b$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} \frac{15}{6} & \frac{51}{6} & \frac{21}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = \frac{15}{6}b_1 + \frac{51}{6}b_2 + \frac{21}{6}b_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = \frac{15}{6},$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_3} = \pi b$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_3} = \begin{bmatrix} \frac{15}{6} & \frac{51}{6} & \frac{21}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_3} = \frac{15}{6}b_1 + \frac{51}{6}b_2 + \frac{21}{6}b_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_3} = \frac{21}{6}.$$

(h) Vamos analisar os casos, levando em consideração que em (g) temos uso de $x_1 = 9$, $x_2 = 64$ e $x_3 = 30$.

- aumento do contrato de fornecimento ($\$5/ton/dia$): Temos o uso total de 176 ton de matéria-prima e o aumento do contrato fornece o custo de \$880.
- aumento da area ($\$6/m^2$): Temos uma área total de $142m^2$ e aumento da área oferece um custo de \$825.

Notamos que aumento da área fornece um custo menor para a empresa, se tornando mais vantagosa.

(i) Adicionamos a nova restrição $x_1 + x_2 + x_3 \leq 101$ e variável de folga x_7:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	0	$-\frac{15}{6}$	$-\frac{51}{6}$	$-\frac{21}{6}$	0	$z-913$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	9
1	1	1	0	0	0	1	101

Preparamos o tableau e continuamos a otimização utilizando dual-simplex, com linha de bloqueio $r=3$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	0	$-\frac{15}{6}$	$-\frac{51}{6}$	$-\frac{21}{6}$	0	$z-913$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	9
0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	-2

Temos o tableu ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	0	0	-6	-6	-15	$z-883$
0	1	0	0	-1	0	2	60
0	0	1	0	1	-1	-4	38
1	0	0	0	0	1	3	3
0	0	0	1	1	-1	-6	12

(j) Adicionamos as novas restrições $x_1 \leq 60$, $x_2 \leq 60$ e $x_3 \leq 60$ e as respectivas variáveis de folga x_7, x_8 e x_9:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0	0	0	$-\frac{15}{6}$	$-\frac{51}{6}$	$-\frac{21}{6}$	0	0	0	$z-913$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	9
1	0	0	0	0	0	1	0	0	60
0	1	0	0	0	0	0	1	0	60
0	0	1	0	0	0	0	0	1	60

Preparamos o tableau e continuamos a otimização utilizando dual-simplex, com linha de bloqueio $r=5$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0	0	0	$-\frac{15}{6}$	$-\frac{51}{6}$	$-\frac{21}{6}$	0	0	0	$z-823$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	64
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	30
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	9
0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	51
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	-4
0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	30

Temos o tableau ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0	-$\frac{15}{2}$	0	0	-$\frac{81}{6}$	-6	0	-$\frac{15}{2}$	0	$z-793$
0	2	0	0	0	0	0	1	0	60
0	-2	1	0	0	-1	0	-2	0	38
1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{3}{8}$	0	3
0	-$\frac{3}{2}$	0	0	-$\frac{3}{2}$	-1	1	-$\frac{3}{2}$	0	57
0	-3	0	1	-2	-1	0	-3	0	12
0	2	1	0	-$\frac{5}{3}$	1	0	2	1	22

AS.15 (data: 10.07.2019)

(a) O valor atualizado de A^9, pode ser obtido por:

$$\hat{A}^9 = (A^I)^{-1}A^9 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/5 & -1 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 5 & -3/10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{A}^9 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1/2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Analisando como isso altera o coeficiente $\hat{c}^9$, utilizando $c^9 = 5$, tem-se:

$$\hat{c}^9 = 5 - \begin{bmatrix} 1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{c}^9 = -5$$

Como se trata de um problema de maximização e $\hat{c}^9$ é negativo, o ótimo não muda, assim a solução não seria alterada.
(b) Para descobrir o quanto b_1 pode crescer, faz-se:

$$\hat{b} = (A^I)^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/5 & -1 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 5 & -3/10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

obtendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} 0.5b_1 + 0.2b_2 - 0.3b_3 & \geq 0 \\ -b_1 + 0.5b_3 & \geq 0 \\ 0.5b_1 - 3/10b_2 + 2b_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Assim, pode-se notar que o aumento de b_1, pode tornar a solução infactível apenas na segunda condição. Diante disso, o valor de b_1 pode aumentar, tal que $b_1 \leq 0.5b_3$.
(c) Para $c^9 = 14$, o novo valor de $\hat{c}^9$ é:

$$\hat{c}^9 = 14 - \begin{bmatrix} 1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{c}^9 = 4$$

Uma vez que $\hat{c}^9$ tornou-se um coeficiente positivo perde-se a otimalidade, sendo necessário continuar a otimização, assim a solução seria alterada

AS.16 (data: 10.07.2019)

(a) Formulação problema dual:

$$\begin{cases} \min\ \phi(w) = & 7w_1 + 4w_2 & \\ \text{s.a} & w_1 + w_2 & \geq 2 \\ & w_1 + 4w_2 & \geq 1 \\ & 2w_1 - w_2 & \geq -1 \\ & w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Do quadro ótimo, sabe-se que $x_1^* = 5$, $x_2^* = 0$ e $x_3^* = 1$. Desse modo, as variáveis duais ótimas podem ser encontradas por meio do Teorema das folgas complementares. Assim, pode-se obter as seguintes relações:

$$x_1^*(w_1^* + w_2^* - 2) = 0 \ \Rightarrow w_1^* + w_2^* = 2 \Rightarrow w_2^* = 2 - w_1^* \tag{24}$$

$$x_2^*(w_1^* + 4w_2^* - 1) = 0 \ \Rightarrow w_1^* + 4w_2^* - 1 \geq 0 \tag{25}$$

$$x_3^*(2w_1^* - w_2^* + 1) = 0 \ \Rightarrow 2w_1^* - w_2^* = -1 \tag{26}$$

Substituindo (24) em (26), obtém-se

$$w_1^* = \frac{1}{3} \implies w_2^* = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \phi(w)^* = 7\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{27}{3}\right) = 9$$

(b) (1) $c^2 = 4$

Como x_2 é uma variável não-básica, pode-se calcular o valor atual por meio da seguinte equação:

$$\hat{c}^2 = c^2 - \pi A^2 \tag{27}$$

$$\hat{c}^2 = 4 - \begin{bmatrix} 1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{c}^2 = -3$$

Visto que, $\hat{c}^2$ continua com o sinal negativo, lembrando que é um problema de maximização, o quadro ótimo permanece na otimalidade e, portanto, a solução ótimo é a mesma.

(2) $c^2 = 8$
Novamente, pode-se utilizar a equação (27), para calcular o novo valor de c^2, assim:

$$\hat{c}^2 = 8 - \begin{bmatrix} 1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{c}^2 = 1$$

	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	
	0	1	0	$-1/3$	$-5/3$	$z-9$
	0	-1	1	$1/3$	$-1/3$	1
←	1	3	0	$1/3$	$2/3$	5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-1/3$	0	0	$-4/9$	$-17/9$	$z-32/3$
$1/3$	0	1	$4/9$	$-1/9$	$8/3$
$1/3$	1	0	$1/9$	$2/9$	$5/3$

Perceba que $\hat{c}^2$ possui sinal positivo, consequentemente, perde-se a otimalidade, sendo então necessário continuar a otimização para obter a nova solução.

Entra x_2 na base e sai x_1

Assim, a nova solução ótima é: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 5/3$, $x_3^* = 8/3$ e $z^* = 32/3$.
(c) O valor atualizado de A^2, pode ser obtido por:

$$\hat{A}^2 = (A^I)^{-1}A^2 = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Obtido $\hat{A}^2$ é necessário verificar como isso altera o coeficiente $\hat{c}^2$, utilizando $c^2 = 4$.

$$\hat{c}^2 = 4 - \begin{bmatrix} 1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{c}^2 = 1$$

	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	
	0	1	0	$-1/3$	$-5/3$	$z-9$
←	0	1	1	$1/3$	$-1/3$	1
	1	2	0	$1/3$	$2/3$	5

Entra x_2 na base e sai x_3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	-1	$-2/3$	$-4/3$	$z-10$
0	1	1	$1/3$	$-1/3$	1
1	0	-2	$-1/3$	$4/3$	3

Desse modo, a nova solução ótima é: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 0$ e $z^* = 10$.
(d) Para poder escolher qual a melhor restrição para aumentar os recursos é necessário analisar os valores para o novo b que pode ser obtido por:

$$\hat{b} = (A^I)^{-1}b,$$

como a matriz $(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, aumentar o recurso da segunda restrição pode tornar $\hat{b} < 0$, o que violaria a factibilidade, por isso aumentaria o recurso da primeira restrição, nessa não há como $\hat{b}$ se tornar negativo. Para $\hat{b} \geq 0$

x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	0	0	z
1	2	1	0	7
4	-1	0	1	4

x_2	x_3	x_4	x_5	
0	$-3/4$	0	$-1/4$	$z-1$
0	$9/4$	1	$-1/4$	6
1	$-1/4$	0	$1/4$	1

o ótimo não muda.
(e) Retirando a atividade x_1, tem-se: Entra x_2 na base e sai x_5

A nova solução ótima é: $x_2^* = 1,\ x_4^* = 6$ e $z^* = 1$.
(f) Inserindo a nova restrição, tem-se:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	-6	0	$-1/3$	$-5/3$	0	$z-9$
0	-1	1	$1/3$	$-1/3$	0	1
1	3	0	$1/3$	$2/3$	0	5
0	1	1	0	0	1	2

Colocando na forma preparada, obtém-se o novo quadro ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	-6	0	$-1/3$	$-5/3$	0	$z-9$
0	-1	1	$1/3$	$-1/3$	0	1
1	3	0	$1/3$	$2/3$	0	5
0	2	0	$-1/3$	$1/3$	1	1

Logo, a solução ótima é: $x_1^* = 5,\ x_3^* = 1,\ x_6^* = 1$ e $z^* = 9$.