Lista – Análise de Sensibilidade

Última atualização: 27 de abril de 2017

AS.1 Seja o PL

$$\begin{array}{rl} \max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & -6x_1 + \ x_2 \ \leq \ 3 \\ & -2x_1 + \ x_2 \ \leq 13 \\ & 2x_1 - 3x_2 \ \leq 13 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2 \end{array}$$

(a) Resolva utilizando o algoritmo Simplex e faça uma interpretação geométrica. Caso haja solução do tipo β , escrever expressões paramétricas do crescimento (ilimitado) de x_1, x_2 e z.

(b) Resolva novamente o problema acrescentando a restrição $x_1 + 3x_2 \leq 74$. Pela interpretação geométrica critique o critério de escolha da coluna.

(c) Acrescentar ao problema original a restrição $2x_1 + 3x_2 \leq 79$, determinar a solução ótima e fazer a interpretação geométrica.

AS.2 O quadro original de um PL de minimização é dado por

11	17	2	22	35	17	16	3	z
4	7	1	9	12	3	10	2	48
6	8	1	10	20	12	4	1	40

(a) Verificar que

$$\begin{aligned} 8A^3 - \ 2A^8 &= A^1 \\ 32A^3 + \ 8A^8 &= \ b \\ 4A^1 + 16A^8 &= \ b \end{aligned}$$

(b) A base correspondente a $I = (8, 1)$ é factível?

(c) $\pi = (1, 1)$ é vetor multiplicador correspondente a que base? Mostre que essa base é ótima, e calcule o valor da função objetivo.

(d) Suponha que c^1 diminui 3 unidades: a base continua ótima? Qual seria a nova base, o valor da solução básica e da função objetivo caso x_1 entre nesta nova base?

AS.3 Uma indústria pode fabricar dois produtos (P_1 e P_2) a partir de duas matérias primas (A e B) cujas disponibilidades em estoque são respectivamente 14 e 10. Para produzir P_1 utiliza-se 2 unidades de cada uma das matérias primas e 1 unidade de mão de obra (u.m.o.). Para P_2 utiliza-se 3 unidades de A, 1 de B e 1 u.m.o. Os produtos P_1 e P_2 fornecem lucros unitários de \$ 12 e \$ 4. A agência financiadora exige a absorção de pelo menos 8 u.m.o.

(a) Formule o problema.

(b) Pela resolução de uma FASE 1, mostre que ele é infactível.

(c) Admita que as matérias primas A e B têm valores de mercado (compra ou venda) de \$ 2 e \$ 3 respectivamente e que se dispõe de uma quantia de \$ 32 que poderá ser usada na aquisição de matérias primas; além disso considere a possibilidade de realizar-se aplicações financeiras com o capital disponível a uma taxa de retorno de 100%. Reformule e resolva o problema. Sugestão: considere irrestritas as variáveis de folga das restrições de matéria prima, acrescente uma restrição para os recursos financeiros e finalmente construa uma função objetivo que contemple a venda de produtos, a compra ou venda de matéria prima e aplicações financeiras.

AS.4 O conjunto básico ótimo do problema

$$\begin{array}{rl} \max & z = x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 1/2x_2 + 2x_3 \ \leq 20 \\ & x_2 + 2x_3 \ \leq 16 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2,\ 0 \leq x_3 \leq 4 \end{array}$$

é $I = (1, 2)$. Inicialmente, determine o quadro correspondente. Depois, usando o método dual-simplex, determine o novo ótimo após acréscimo da restrição $-x_1 + 4x_2 \geq 4$.

AS.5 Três produtos são fabricados sendo submetidos a três tipos de operação. O tempo consumido em minutos em cada operação, por unidade de produto, a quantidade total de tempo, em minutos, disponível por dia para cada operação, bem como o lucro líquido em reais, por unidade de produto, são dados pela tabela mostrada a seguir

	Minutos por unidade			Tempo disponível
Operação	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Minutos por dia
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
Lucro (R\$ / unid.)	3	2	5	

(a) Determinar a produção diária de cada produto com o objetivo de maximizar o lucro, sabendo que toda a produção será vendida.

(b) Supor que desejamos aumentar a capacidade de produção da fábrica e que o custo de expansão de cada um dos três setores da fabricação, responsáveis pelas três operações, é o mesmo. Qual dos três setores é prioritário com respeito ao plano de expansão? Analisar, para cada setor, a importância ou não da expansão.

(c) Supor que os produtos tenham de ser submetidos a uma quarta operação. A capacidade máxima disponível para a quarta operação é de 600 minutos/dia. Sabemos que se fosse fabricado somente um tipo de produto, poderíamos produzir no quarto setor no máximo 100 unidades do produto 1 ou 200 unidades do produto 2 ou 600 unidades do produto 3. Determine a nova solução ótima.

(d) Formular o dual do problema dado e determinar sua solução sem resolvê-lo.

(e) Supor que aumentamos a capacidade do setor 1 de 20 minutos, isto é, passamos a ter 450 minutos/dia disponíveis para a operação 1. A solução continuaria a ser a mesma? Por quê? No caso da solução ser diferente, determinar a nova solução ótima.

AS.6 O quadro inicial de um PL de maximização é

-1	-6	7	a	-5	0	0	z-0
5	-4	13	b	1	1	0	20
1	-1	5	c	1	0	1	8

e o quadro atual é

-7	2/7	0	0	-11/7	-8/7	-23/7	50/7	z-60/7
	-1/7	0	1	-2/7	3/7	-1/7	4/7	12/7
	-12/7	1	0	-3/7	8/7	-5/7	13/7	4/7

Determine a, b, c, B^{-1}, $\partial x_2/\partial x_5$, $\partial x_2/\partial b_2$, $\partial f/\partial x_6$,

AS.7 O quadro ótimo de um PL de maximização com restrições de $\leq$ é dad por

			var. de folga			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	-4	0	-9	z-30
1	1	0	2	0	1	12
0	0	1	1	0	4	9
0	-2	0	1	1	6	6

(a) Qual a solução do primal? e do dual?

(b) Quanto vale $\partial f/\partial b_1$? e $\partial x_1/\partial x_6$?

(c) Você compraria uma unidade adicional do recurso 1 a um preço de 3? Explique.

(d) E por quanto venderia uma unidade do recurso 3?

(e) Há solução ótima alternativa? Qual? Ela corresponde a um plano de produção diferente? Como mudam os "*shadow prices*"?

(a)

AS.8 Determine o quadro e a solução ótima do seguinte problema

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + \ \ x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Suponha a seguir que a segunda restrição é removida. Como aproveitar o quadro ótimo para resolver este novo problema.

AS.9 Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & x_1 + 4x_2 - \ \ x_3 \leq 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

que apresenta o quadro ótimo abaixo

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-6	0	-1/3	-5/3	z-9
0	-1	1	1/3	-1/3	1
1	3	0	1/3	2/3	5

(a) Formule o problema dual e encontre, a partir do quadro ótimo, as variáveis duais ótimas.

(b) Mudando o coeficiente de x_2, na função objetivo, de 1 para 8, encontre a nova solução ótima, usando análise de sensibilidade.

(c) Qual a solução ótima se o coeficiente de x_2 na função objetivo variar de 1 para 4?

(d) Ache a nova solução ótima se a coluna A^2, no problema original, mudara de $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$.

(e) Se você tivesse que escolher entre aumentar os recursos da primeira ou segunda restrição, qual você escolheria? Por que? Qual o efeito deste aumento no valor ótimo da função objetivo?

AS.10 Considere o seguinte quadro ótimo de um problema de maximização, no qual as restrições são do tipo $\leq$.

					Var. de folga			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	0	0	-2	0	-2	-1/10	-2	z-17
1	0	0	-1	0	1/2	1/5	-1	3
0	1	0	2	1	-1	0	1/2	1
0	0	1	-1	-2	5	-3/10	2	7

(a) A solução seria alterada se uma nova variável x_9, com coeficiente $\left[2,0,3\right]^T$ nas restrições e preço 5, fosse adicionada ao problema?

(b) De quanto pode crescer b_1 (recursos da primeira restrição) sem que a factibilidade seja violada?

(c) Considere novamente o item (a), porém, com preço 14.

(d) Considere o quadro do exercício anterior. Suponha que adicionemos a restrição $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$. A solução ótima é a mesma? Se não, qual a nova solução ótima?

(e)

(f)

AS.11 Um fazendeiro tem 500 hectares (ha) de terra e deseja determinar a área a ser usada nas seguintes culturas: trigo, milho e soja. A quantidade de homens-dia necessária para cada cultura, o custo de preparação da terra e o lucro por ha das três culturas estão sumarizados a seguir:

Cultura	Homens-dia/ha	Custo de preparação ($/ha)	Lucro ($/ha)
Trigo	6	100	60
Milho	8	150	100
Soja	10	120	80

Suponha que o número máximo de homens-dias disponíveis seja 5000 e que o fazendeiro disponha de \$ 60000 para preparação.

(a) Encontre a solução ótima.

(b) Supondo que um dia trabalho tem 8 horas, seria lucrativo para o fazendeiro contratar mão de obra adicional a \$ 3 por hora? Por que?

(c) Suponha que o fazendeiro contratou uma entrega de pelo menos o equivalente a 90 ha de trigo. Use análise de sensibilidade para encontrar a nova solução ótima.

AS.12 Um produto é montado com três peças que podem ser fabricadas em duas máquinas A e B. Nenhuma das máquinas pode fabricar peças diferentes ao mesmo tempo. As quantidades de peças que podem ser fabricadas por cada máquina, por hora, estão representadas a seguir:

	Máquina A	Máquina B
Peça 1	11	6
Peça 2	15	12
Peça 3	–	24

A gerência está procurando a forma de operar as máquinas que maximize a quantidade diária de produtos montados. Atualmente a fábrica tem três máquinas do tipo A e cinco do tipo B.

(a) Resolva o problema.

(b) Se uma nova máquina pode ser comprada, de qual tipo você recomendaria? Por que?

(c) A gerência está estudando a compra de uma máquina do tipo A, a um custo de \$ 100000. Suponha que a vida útil da máquina é de 10 anos e que cada ano é equivalente a 2000 horas de trabalho. Você recomendaria a compra se o lucro unitário do produto é de \$ 0.875? Por que?

AS.13 Considere o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 4x_2 \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_i \ge 0, \; i = 1, 2
\end{aligned}
$$

cujo quadro ótimo é

0	0	-3/2	-5/2	z-36
1	0	-1/2	1/2	4
0	1	1/2	1/2	8

(a) Aparece a restrição adicional: $x_1 + 3x_2 \le 24$. Aproveitando o quadro ótimo do problema, determinar a nova solução.

(b) No problema original a restrição $-x_1 + x_2 \le 4$ deixa de valer. Determinar a nova solução, aproveitando o quadro ótimo fornecido.

(c) Qual a solução ótima, se fosse acrescentada ao problema a seguinte restrição: $-2x_1 + 3x_2 \leq 16$.

AS.14 Procura-se determinar a escala ótima de produção diária de uma fábrica de aguardente (tipos I, II e III). A matéria prima é não estocável e há um contrato para seu fornecimento (176 ton/dia). A área de armazenamento para o produto final é exígua (142 m^2) e a agência financiadora da produção exige a absorção de 300 homens-horas (H-H). A tabela mostrada a seguir fornece dados técnicos e econômicos do problema.

	Produtos		
	I	II	III
Matéria Prima (ton/Kl)	2	2	1
Área (m^2/Kl)	2	1	2
Mão de Obra (H-H/Kl)	2	3	3
Lucro ($ Kl)	9	5	10

(a) Verifique que o quadro original deste problema pode ser dado por (problema de maximização com $x_i \geq 0$)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
9	5	10	0	0	0	z-0
2	2	1	1	0	0	176
2	1	2	0	1	0	142
2	3	3	0	0	-1	300

Forneça o significado de cada variável x_i e de f.

(b) O problema é resolvido por PL e fornece o resultado

-1	0	0	0	-5	0	z-710
-2/3	1	0	0	-1	-2/3	58
4/3	0	1	0	1	1/3	42
2	0	0	1	1	1	18

Há soluções alternativas? Compare-as.

(c) Face a problemas sociais, resolveu-se estabelecer um prêmio de $ 1/H-H para empregos gerados além do limite (300 H-H). Qual a nova solução?

(d) A Cooperativa de Produtores acaba de implantar um "aguardenteduto" que recolhe instantaneamente todo produto final para uma área de armazenamento central. Não há mais qualquer dificuldade de estocagem. Qual a nova solução?

(e) O setor de pesquisa desenvolveu uma planta piloto para fabricação de rum:

$$\text{1 Kl requer} \begin{cases} \text{1 ton de matéria prima} \\ \text{2 m}^2 \text{ de área} \\ \text{3 H-H de mão de obra} \end{cases}$$

que fornece $ 6 de lucro. O investimento necessário à implantação da linha de fabricação é equivalente a $ 100/dia. Que decisão tomar?

(f) Houve uma queda brusca no fornecimento de matéria prima: $176 \to 130$.

- O que ocorre no caso da letra (b)?

- E no caso da letra (c)?

(g) Foi feito um investimento em propaganda que logrou alterar o lucro dos produtos: $(9, 5, 10) \rightarrow (15, 7, 11)$.

- Qual a nova solução?
- Escrever os valores de I, A^I, $(A^I)^{-1}$, $\partial f/\partial b_1$, $\partial f/\partial b_3$.

(h) Há um capital de \$ 300 para ser investido no aumento do contrato de fornecimento (\$ 5/ton/dia) e/ou no aumento da área (\$ 6/m^2). Que decisão tomar? (referência (g)).

(i) A produção total de aguardente terá que ser no máximo de 101 Kl (acordo de quotas entre produtores-cartel). Faça os ajustes necessários (referência (g)).

(j) A produção de qualquer tipo de aguardente deverá se limitar a um máximo de 60 Kl (decisão do cartel de produtores). Proceda aos ajustes (referência (g)).

AS.15 Considere o seguinte quadro ótimo de um problema de maximização, no qual as restrições são do tipo $\leq$

					Var. de folga			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	0	0	-2	0	-2	-1/10	-2	z-17
1	0	0	-1	0	1/2	1/5	-1	3
0	1	0	2	1	-1	0	1/2	1
0	0	1	-1	-2	5	-3/10	2	77

(a) A solução seria alterada se uma nova variável x_9, com coeficientes $\left[2, 0, 3\right]^T$ nas restrições e preço 5, fosse adicionada ao problema?

(b) De quando pode crescer b_1 (recursos da primeira restrição) sem que a factibilidade seja violada?

(c) Considere novamente o item (a), porém, com preço 14.

AS.16 Considere o seguinte PL

$$
\begin{array}{rl}
\max & z = 2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7 \\
 & x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4 \\
 & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3
\end{array}
$$

cujo quadro ótimo é

0	-6	0	-1/3	-5/3	z-9
0	-1	1	1/3	-1/3	1
1	3	0	1/3	2/3	5

(a) Formule o problema dual e encontre, a partir do quadro ótimo acima, as variáveis duais ótimas.

(b) Qual será a nova solução ótima se (1) $c^2 = 4$; (2) $c^2 = 8$.

(c) Obtenha a nova solução se A^2 mudar de $\begin{bmatrix}1 & 4\end{bmatrix}^T$ para $\begin{bmatrix}4 & 1\end{bmatrix}^T$ e $c^2 = 4$.

(d) Se você tiver que escolher entre aumentar os recursos da primeira ou da segunda restrição, qual você escolheria? Por que? Qual o efeito deste aumento no valor ótimo da função objetivo?

(e) Suponha que a atividade x_1 seja desativada. Qual o novo ótimo?

(f) Na condição original, suponha uma nova restrição do tipo $x_2 + x_3 \geq 2$. Qual é o novo ótimo?

AS.17 Uma família quer obter uma dieta de custo mínimo a partir de seis alimentos primários, disponíveis no mercado de forma que a dieta contenha no mínimo 9 unidades de vitamina A e 19 unidades de vitamina C. Os dados do problema são:

Alimento	1	2	3	4	5	6
Custo $/Kg	35	30	60	50	27	22
Unid. Vitamina A/Kg	1	0	2	2	1	2
Unid. Vitamina C/Kg	0	1	3	1	3	2

(a) Obtenha a solução ótima, utilize uma fase I ou o método do Big-M se necessário. Qual é a solução ótima do problema dual?

(b) Suponha que um novo alimento esteja disponível no mercado, a um custo de $ 88/Kg e contenha 2 unidades de vitamina A/Kg e 4 unidades de vitamina C/Kg. Deve este alimento ser incluído na dieta? No ponto de quebra do custo existe uma dieta ótima que inclua o alimento 7 e outra que não inclua? Qual é a dieta ótima se o preço do alimento novo é $ 33/Kg?

(c) A família, lendo o Conselheiro Médico do Lar, descobre que a vitamina E é necessária à saúde com um mínimo de 10 unidades e que comparece nos alimentos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 com 2, 3, 5, 2, 1 e 1 unidades/Kg respectivamente. A família deseja acrescentar esta restrição adicional ao problema. Como deve isto alterar a dieta ótima?

(d) A família, sendo um pouco obesa, deseja emagrecer, mas sem passar muita fome. Resolve então fazer uma dieta consistindo de exatamente 2000 calarias que comparecem nos alimentos de 1 a 6, nas seguintes proporções: 160, 20, 500, 280, 300 e 360 calorias/Kg. Qual é a alteração na solução ótima (Ref. problema original)?

(e) Qual é o efeito marginal de se aumentar o requisito mínimo de vitamina C no custo ótimo da dieta? Quanto deve crescer o requisito mínimo de vitamina C antes da base ótima se tornar não ótima? Qual é a dieta ótima quando o requisito mínimo é 39 unidades?

(f) Qual o efeito no custo de se aumentar os requisitos de vitamina B? De quanto deve crescer este requisito para que $I = \{5, 6\}$ se torna base não ótima? Qual seria a nova base (Ref. problema original)?

(g) Suponha que cada unidade adicional de vitamina A na dieta ocasiona uma economia de $ 10 na despesa médica. Como isto altera a dieta ótima?

(h) Para qual intervalo de custo por quilo dos alimentos 4 e 5 a base ótima permanece ainda ótima?

(i) O que acontece na dieta ótima se a quantidade de vitamina C do alimento 4 muda? Para qual intervalo de valores desta quantidade a base ótima permanece a mesma? Suponha que uma versão mais rica do alimento 4 contenha $(1+\alpha)$ unidades de vitamina C/Kg e esteja disponível a um custo de $ 50 + 4α/Kg, para qualquer $\alpha \geq 0$. Qual o valor mínimo de α para o qual o alimento 4 se torna atrativo para a família incluí-lo na dieta? Para $\alpha = \alpha_{min} + 1$, qual a nova base ótima (Ref. problema original)?

(j) Suponha que o número de unidades de vitamina C no alimento 5 passe de 3 para 1 unidade por Kg. Qual é a nova solução ótima?

AS.18 Uma pequena fábrica de confecções dispõe para o mês de junho de 840 m de algodão, 570 m de lã e 480 m de seda. Pode produzir atualmente 3 modelos diferentes para a coleção de inverno. Há um compromisso (encomenda aceita) de fabricar pelo menos 30 unidades do modelo III.

	Dados Unitários Modelos		
	I	II	III
Algodão	2	2	3
Lã	2	1	1
Seda	1	2	1
Lucro	100	140	70

(a) Mostre que o quadro inicial pode ser dado por

100	140	70	0	0	0	z-2100
2	2	3	1	0	0	750
2	1	1	0	1	0	540
1	2	1	0	0	1	450

Explique o significado de cada variável.

(b) Complete o quadro final; informe o procedimento adotado.

			0	-20	-60	z-
			1	-2/3	-2/3	
			0	2/3	2/3	
			0	-1/3	-1/3	

Descreva a solução ótima para o mês de junho.

(c) As condições para o mês de julho são idênticas, exceto que há uma queda de 180 m na disponibilidade de lã. Qual a nova solução? Fornecer I, $(A^I)^{-1}$, $\partial f/\partial b_2$, $\partial x_1/\partial x_4$.

(d) As condições de agosto também são idênticas às de junho, a menos que uma campanha de marketing bem sucedida aumentou o lucro unitário do modelo III para \$ 110. Qual o novo plano de produção?

(e) Setembro repete junho; há entretanto uma operação tartaruga dos empregados, que fixa uma quota de produtos transportados traduzida na equação

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 1365$$

Como operar?

(f) Em outubro, o mercado é inundado por uma enorme quantidade de lã boa e barata. Relaxe a restrição correspondente e procure o novo ótimo (referência: junho).

(g) Agora, planeje-se junho do próximo ano; duas "atividades" adicionais podem ser introduzidas:

- Lançar um quarto modelo, expresso por $c_4 = 4$ e $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- Vender algodão a \$ 24/m^2

A referência é o último mês de junho; não há encomendas prévias. Que decisões tomar?

AS.19 Uma montadora de automóveis produz carros "standard" e compactos. A fábrica é dividida em oficina 1, de montagem, e oficina 2, de acabamento. Na oficina 1 gasta-se 5 H-H (homem-horas) por carro standard e 3 H-H por carro compacto. Na oficina 2, 3 H-H por unidade, seja standard ou compacto. Na oficina 1 dispõe-se de 150 H-H e na 2 de 120 H-H. O lucro proporcionado por um carro standard é de $ 400 e pelo compacto $ 300.

(a) Qual o plano de produção que você escolheria?

(b) Qual o problema dual? Baseado no quadro ótimo de (a), qual sua solução?

(c) Como mudaria o ótimo em (a) se $b_2 = 144$?

(d) Idem com $b_2 = 78$.

(e) Como variaria a solução ótima e o lucro com c_1 ? $200 \leq c_1 \leq 600$.

- Refinamentos na produção fizeram aparecer uma oficina 3 na qual gasta-se 3 H-H por carro standard e 2 H-H por carro compacto. Sua disponibilidade é de 100 H-H.

(f) Comente a nova situação.

(g) Idem com disponibilidade de 90 H-H.

- O fabricante decide produzir um carro de luxo; ele gasta 6 H-H e 4 H-H respectivamente nas oficinas 2 e 3. Situação de referência: (a).

(h) Reestudar o plano de produção sabendo que um carro de luxo proporciona $ 450 de lucro.

(i) Idem com lucro de $ 550.