Lista – Álgebra Linear

Última atualização: 14 de março de 2017

AL.1 Seja

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & -1 & 2 \\ 20 & 26 & 2 & 40 & 1 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 34 \end{bmatrix}}_{b}$$

Tomando $I = \{6, 1, 3\}$, realize todas as operações necessárias para determinar $(A^I)^{-1}$.

AL.2 Considere que a fábrica do problema enunciado em (FML.1) opera fabricando mensalmente 100 chapas A, 1650 chapas B e 125 chapas C. Diga, sem resolver o problema e sem aplicar o simplex se esta solução é a mais lucrativa.

AL.3 Elabore uma solução factível para o problema do petróleo (FML.5). Há dificuldade em reconhecer se ela é básica?

AL.4 Coloque na forma padrão os dois seguintes problemas de PL

(a)

$$\begin{cases} \max & z = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ & \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & \geq 5 \end{array} \\ s.a & \begin{array}{ccccc} 2x_1 & & +x_3 & & \leq 4 \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} & x_2 & +x_3 & +x_4 & = 6 \end{array} \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \min & z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ & \begin{array}{cccc} x_1 & 1 + x_2 & -x_3 & \leq 40 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} x_1 & +9x_2 & -7x_3 & \geq 50 \end{array} \\ s.a & \begin{array}{cccc} 5x_1 & +3x_2 & & = 20 \end{array} \\ & |5x_1 + 8x_2| \quad \leq 100 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ livre} \end{cases}$$

AL.5 Esboce as regiões factíveis do conjunto $(x : Ax \leq b)$ sendo que A e b são dadas a seguir. A região é vazia? É limitada?

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

AL.6 Mostre como resolver um sistema de m equações a m incógnitas. Evidencie a identificação dos seguintes casos:

(a) Inconsistência do sistema;

(b) Redundância das equações;

(c) Solução única;

(d) Explique como calcular a inversa da matriz no caso (c). Exemplifique com o sistema abaixo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

AL.7 B é uma matriz regular dada pelas suas colunas. Sua inversa A é conhecida pelas suas linhas

$$B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \leftarrow & A_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & A_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & A_3 & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Em termos de A_1, A_2 e A_3, forneça as inversas de C e D, definidas a seguir

$$C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 & B^2 & \alpha B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 + B^2 & B^2 & \alpha B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

AL.8 Usando técnicas de PL, como você mostraria que

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8x_1 + 3x_2 \leq 23$$

AL.9 É possível resolver o problema abaixo com técnicas de PL? Explique.

$$\begin{cases} \max & z = -1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad \leq 15 \\ s.a & |-2x_1 + 3x_3| \quad \geq 12 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \quad \geq 2 \\ & x_i > 0 \end{cases}$$

AL.10 Para a forma padrão da PL, defina clara e sucintamente:

(a) solução básica	(b) solução factível	(c) solução básica factível
(d) solução ótima	(e) solução básica ótima	(f) solução tipo β (beta)

(g) Indicar as condições para que uma solução factível não básica seja ótima.

AL.11 Dado

$$\begin{cases} \max & z = c^T x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Definir sucintamente: (a) Base (b) Forma Preparada (c) Vetor Multiplicador

AL.12 Coloque os problemas abaixo na forma padrão de um PL e determine suas soluções por meio de interpretação geométrica.

(a)

$$\begin{cases} \max & z = -3x_1 + 2x_2 \\ s.a & \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ |x_1 + x_2| &\leq 3 \end{aligned} \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \max & z = -3x_1 + 2x_2 \\ s.a & \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \end{aligned} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ livre} \end{cases}$$

AL.13 Seja o problema P

$$P \triangleq \begin{cases} \max & z = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \\ s.a & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Coloque o problema P na forma preparada da relação a $I = (1, 4, 2)$.

(b) Identifique uma solução tipo β para P. Escreva suas equações, evidenciando a tendência para infinito.

AL.14 Seja o PL na forma preparada

$$\begin{aligned} \hat{c}^J x_J &= Z(max) - Z_0 \\ x_I + \hat{A}^J x_J &= b \\ x_I \geq 0,\ x_J &\geq 0 \end{aligned}$$

Seja i a primeira componente da base 1, i.e. $1 = (i, \bar{I})$. Qual a condição sobre $\hat{A}^J$ para que j possa substituir i na base. Justifique a resposta.

AL.15 Uma função é super-aditiva se:

$$g(Y_1 + Y_2) \geq g(Y_1) + g(Y_2)$$

Mostre que o valor ótimo de f, suposto tipo α, em:

$$\begin{cases} \max & f = c^T x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

é uma função super-aditiva de b.

AL.16 Uma função é super-aditiva se:

$$g(Y_1 + Y_2) \leq g(Y_1) + g(Y_2)$$

Mostre que o valor ótimo de f, suposto tipo α, em:

$$\begin{cases} \max & f = c^T x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

é uma função super-aditiva de c.

AL.17 Seja $B = [e_1\ e_2\ e_3\ e_4]$ uma base e d um vetor. Considerando os casos

(a)

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ e_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix}4\\6\\2\\1\end{bmatrix}$$

(b)

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ e_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix}3\\0\\4\\-3\end{bmatrix}$$

Indique os vetores e_i que compõem a base que podem ceder lugar ao vetor d de modo que mantenha-se a base. Explique

AL.18 Considere o sistema de equações

$$\begin{array}{cccccl}
2x_1 & +x_2 & +10x_3 & +7x_4 & +Ax_5 & =19\\
x_1 & +x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +6x_5 & =13\\
5x_1 & +2x_2 & +24x_3 & +17x_4 & +15x_5 & =44\\
2x_1 & +3x_2 & +14x_3 & +9x_4 & +17x_5 & =35\\
 & +4x_2 & +6x_3 & +x_4 & +20x_5 & =40
\end{array}$$

Coloque-o em forma de quadro. Após dois pivoteamentos, o primeiro em torno do elemento (1.2), o segundo em torno de (2.1), chega-se a:

0	1	2	1	5	7
1	0	4	3	1	6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2
0	0	−2	−3	0	12

Comente redundâncias e incompatibilidades nos casos: (a) $x \geq 0$, (b) x livre. Qual o valor de A? Explique.

AL.19 Coloque o problema abaixo na forma padrão

$$\begin{cases}
\max & z = 2x_1 + x_3 + 5x_5 \\
 & 2x_1 + x_3 + 6x_4 + x_5 \quad \leq 13 \\
s.a & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \quad \geq 20 \\
 & x_3 + x_4 + x_5 \quad = 5 \\
 & |2x_1 + x_3 + x_5| \quad \leq 10 \\
 & x_1, x_4, x_5 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre}
\end{cases}$$

AL.20 Prove que o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

com $A \in \mathbb{B}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, é convexo.

AL.21 Resolva por inspeção e justifique

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 8x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 3 \\
s.a & 0 \leq x_2 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_3 \leq 20 \\
 & 0 \leq x_4 \leq 2
\end{array}
$$