IA881 – Otimização Linear

Aula: Introdução à Programação Linear

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2023

Tópicos

Introdução I

- Programação Linear: trata da busca pelo melhor (menor ou maior) valor que uma função linear assume (chamado de valor "ótimo") quando suas variáveis são restritas por igualdades e desigualdades lineares.

- Caso a função ou as restrições sejam não lineares, os métodos apresentados ao longo do curso não se aplicam.

Histórico

- George B. Dantzig 1947.
- L. V. Kantorovich 1939 (1959).
- "Programação Linear" $\rightarrow$ T. C. Koopmans (1948).
- Método Simplex $\rightarrow$ 1949.
- Importância do método simplex: (1) modela problemas importantes e complexos; (2) Eficiência computacional.

O Problema de Programação Linear I

- Considere o seguinte problema de programação linear

$$
\begin{array}{lccccccc}
\min & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + \cdots + & c_n x_n & & \\
s.a & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \cdots + & a_{1n} x_n & \geq & b_1 \\
 & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + \cdots + & a_{2n} x_n & \geq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \cdots + & a_{mn} x_n & \geq & b_m \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n}
\end{array}
$$

sendo que $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ é a função objetivo a ser minimizada e cujo valor é denotado por z. Os coeficientes $c_i, \; i = 1, \ldots, n$ são valores *conhecidos* e $x_i, \; i = 1, \ldots, n$ são as variáveis de decisão a serem determinadas.

A desigualdade $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ é a i-ésima restrição. Os coeficientes a_{ij}, $i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$ são chamados de coeficientes tecnológicos e, quando agrupados, dão origem à matriz de restrição **A**, dada por

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

O Problema de Programação Linear II

O vetor coluna **b**, composto pelas componentes b_i, $i = 1, \ldots, m$ é chamado como o vetor do lado direito. As restrições $x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n$ são chamadas de restrições de não negatividade.

Um conjunto de valores das variáveis $x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n$ que satisfaz todas as restrições é chamado de ponto factível ou solução factível. O conjunto de todas as soluções factíveis constitui a região factível ou espaço factível.

A partir da terminologia apresentada, o problema de programação linear pode ser estabelecido como:

Problema de Programação Linear

Entre todas as soluções factíveis, encontre uma que minimize (ou maximize) a função objetivo.

O Problema de Programação Linear III

- Exemplo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & z = 2x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a} & \quad x_1 + \ \ x_2 \ \geq \ \ 3 \\
 & -x_1 - 2x_2 \ \geq -8 \\
 & x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,2
\end{array}
$$

O problema tem duas variáveis de otimização e a função objetivo a ser minimizada é $2x_1 + 5x_2$. As restrições e a região factível são mostradas na Figura 1. O problema de otimização consiste em encontrar um ponto dentro da região factível de forma que a função objetivo assuma seu menor valor possível.

O Problema de Programação Linear IV

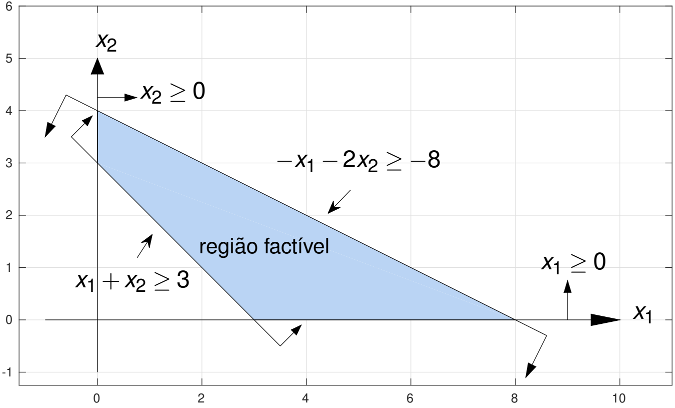


Figura 1: Região factível e restrições do exemplo.

Hipóteses da Programação Linear

- Proporcionalidade: Para uma dada variável x_j, sua contribuição para o custo e para a i-ésima restrição é $c_j x_j$ e $a_{ij} x_j$, respectivamente. Se sua quantidade é, por exemplo, dobrada, o efeito é proporcional tanto no custo quanto na restrição. Em outras palavras, não há economia (ou desconto) em usar uma maior quantidade da variável x_j.

- Divisibilidade: Valores não integrais são permitidos às variáveis.

- Determinístico: Os coeficientes c_j, b_i e a_{ij} são conhecidos deterministicamente.

- Em todos os problemas de programação linear considerados ao longo curso, todas as hipóteses anteriores estão implicitamente assumidas.

- Embora o modelo de programação linear apresentado possa parecer limitado (pouco abrangente), o mesmo é amplamente utilizado para modelar problemas do mundo real, fornecendo resultados satisfatórios, além de prover análises mais sofisticadas do que simplesmente fornecer valores para as variáveis de decisão.

Transformado Desigualdades em Igualdades I

- A restrição

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

pode ser transformada em uma equação introduzindo uma variável de excesso (em inglês, *surplus variable)* x_{n+1}, levando a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i, \quad x_{n+1} \geq 0$$

- De modo similar, a restrição

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

pode ser transformada em uma equação introduzindo uma variável de folga (em inglês, *slack variable)* x_{n+1}, levando a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i, \quad x_{n+1} \geq 0$$

Transformado Desigualdades em Igualdades II

Finalmente, uma equação na forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

pode ser transformada em duas desigualdades

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \leq \ b_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \geq \ b_i$$

embora esse procedimento seja menos usual.

Variáveis não negativas

- Na maioria dos problemas práticos as variáveis estão associadas a quantidades físicas, ou seja, assumem valores não negativos.

- O método Simplex, que estudaremos mais à frente, foi projetado para tratar apenas variáveis não negativas.

- Caso em um problema particular uma variável x_j seja irrestrita (assume valores positivos e negativos), então a mesma pode ser substituída por

$$x_j' - x_j'', \quad x_j' \geq 0, \quad x_j'' \geq 0$$

- Caso tenhamos múltiplas (k) variáveis irrestritas, podemos usar as transformações

$$x_j = x_j' - x'', \quad x_j' \geq 0, \quad x'' \geq 0, \quad j = 1, \ldots, k$$

Note que temos apenas uma variável x'', representando o valor mais negativo possível entre as k variáveis.

Minimização e Maximização

- Uma manipulação usual é transformar um problema de maximização em um problema de minimização e vice-versa. Note que, sobre qualquer região

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

Portanto, basta multiplicar os coeficientes da função objetivo por -1 para transformar um problema de maximização (minimização) em um problema de minimização (maximização).

- Terminada a otimização, o valor ótimo da função objetivo original é o valor ótimo da função objetivo do problema modificado multiplicado por -1.

Formas padrão e canônica

- A tabela a seguir mostra as formas padrão (*standard*) e canônica (*canonical*) de programação linear para problemas de minimização e maximização.

	minimização	maximização
forma padrão	$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ s.\ a & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{array}$	$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ s.\ a & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{array}$
forma canônica	$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ s.\ a & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{array}$	$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ s.\ a & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{array}$

Notação matricial I

- Um problema de programação linear pode ser enunciado em termos de uma notação mais compacta. Por exemplo, o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.\ a \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

pode ser reescrito na forma (a notação $(\cdot)^T$ denota transposição)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ s.\ a \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

com os vetores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

Notação matricial II

e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}^i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

Observação: A notação em que a matriz $\mathbf{A}$ é descrita por vetores linhas ($\mathbf{a}^i$) é menos usual.

Note que vetores e matrizes são apresentados em **negrito**.

Etapas da Programação Linear

- A modelagem e análise de um problema de programação linear, em geral de qualquer problema de pesquisa operacional, evolui por meio de várias etapas.
  - Formulação do problema.
  - Construção do modelo matemático.
  - Solução do modelo (aplicação de técnicas de otimização).
  - Testes e análises do modelo (com eventual restruturação).
  - Implementação.

Planejamento de Produção I

- Uma empresa produz sapatos e botinas. As matérias primas (e suas respectivas quantidades disponíveis) e o lucro em função da produção dos calçados são mostradas na tabela abaixo. O objetivo é saber qual é a proporção de fabricação entre sapatos e botinas que maximiza o lucro da empresa.

	produtos		
matéria prima	sapatos	botinas	disponibilidade
couro	2	1	8
borracha	1	2	7
cola	0	1	3
lucro (p./u.)	1	1	

- Formular a escolha da melhor proporção de fabricação de calçados em termos de um problema de programação linear.

Planejamento de Produção II

- Formulação matemática:

$$
\begin{array}{rl}
\max & z = x_1 + x_2 \\
\text{s. a} & 2x_1 + \ \ x_2 \leq 8 \\
& \ \ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& \qquad\ \ x_2 \leq 3 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,2
\end{array}
$$

sendo que x_1 (x_2) é quantidade de sapatos (botinas) fabricados. A solução (geométrica) é apresentada mais adiante.

Problema da Dieta I

- Estão disponíveis 5 tipos de alimentos, cada um contendo uma certa quantidade de nutrientes em termos de proteínas e sais minerais. Especificada a necessidade diária de nutrientes e o custo associado a cada tipo de alimento, deseja-se determinar qual é a dieta que atende a necessidade e apresenta o menor custo. Formular o problema em função dos valores apresentados na tabela abaixo.

	alimentos					necessidades nutrientes
	1	2	3	4	5	
proteínas	3	4	5	3	6	42
sais minerais	2	3	4	3	3	24
custo	25	35	50	25	36	

Problema da Dieta II

- Formulação matemática do problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 25x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 33x_4 + 35x_5 \\ \text{s. a} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 42 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 24 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

- Solução ótima: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$ e $x_5 = 6$. Custo ótimo: 276.

Problema de Alocação I

- Seja a região mostrada a seguir em que a_i é o número de assinaturas na área i, e b_j é capacidade de atendimento da central telefônica j. Problema: alocar os assinantes às centrais de modo a minimizar o custo de ligação assinante-central (é um subproblema da localização das centrais).

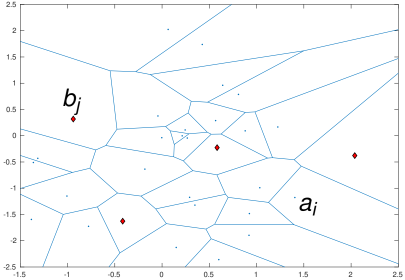


Figura 2: Planejamento de rede de telecomunicação.

Problema de Alocação II

- Seja x_{ij} o número de assinantes da área i conectado à central j e c_{ij} o custo para conectar o assinante da área i à central j.

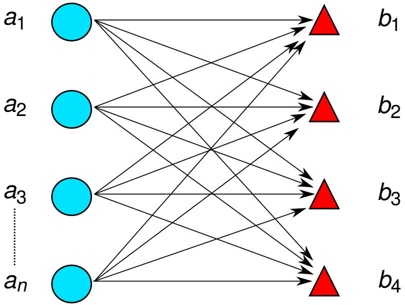


Figura 3: Ligações entre assinantes e centrais.

Problema de Alocação III

- Formulação de programação linear

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
s.\,a \quad & \sum_j x_{ij} \geq a_i, \quad && \forall i \\
& \sum_i x_{ij} \leq b_j, \quad && \forall j \\
& x_{ij} \geq 0, \quad && \forall i, \forall j
\end{aligned}
$$

Solução Geométrica I

- Considere um problema de minimização na forma de programação linear, com duas ou três variáveis de otimização, permitindo a visualização geométrica da região factível.

- Entre todos os pontos factíveis, queremos encontrar aquele que fornece o menor valor para $z = c^T x$. Note que todos os pontos que geram o mesmo valor de z, isto é, satisfazem

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

estão sobre um hiperplano (no caso 2D, sobre uma reta, no caso 3D, sobre um plano).

- No caso 2D, encontrar o valor ótimo de z pode ser visto como mover a reta $c_1 x_1 + c_2 x_2 = z$ paralelamente a si mesma no sentido de diminuir o valor da função objetivo mas permanecendo dentro da região factível.

- No problema de minimização (maximização), a direção de movimento é $-c$ (c).

Solução Geométrica II

- Na Figura 4, note que no ponto $x^\star$, a reta $c_1x_1^\star + c_2x_2^\star = z^\star$ não pode ser mais movida na direção $-c$, pois ficaria fora da região factível. Assim conclui-se que $x^\star$ é uma solução ótima.

- Obviamente esta técnica é conveniente apenas a problemas de duas ou três variáveis, contudo, a técnica fornece alguns *insights* interessantes sobre o caso geral de programação linear. Por exemplo, como veremos mais adiante, se o problema de programação linear tiver uma solução ótima finita, então o problema também tem uma solução que é ponto extremo (vértice do poliedro), como na Figura 4.

Solução Geométrica III

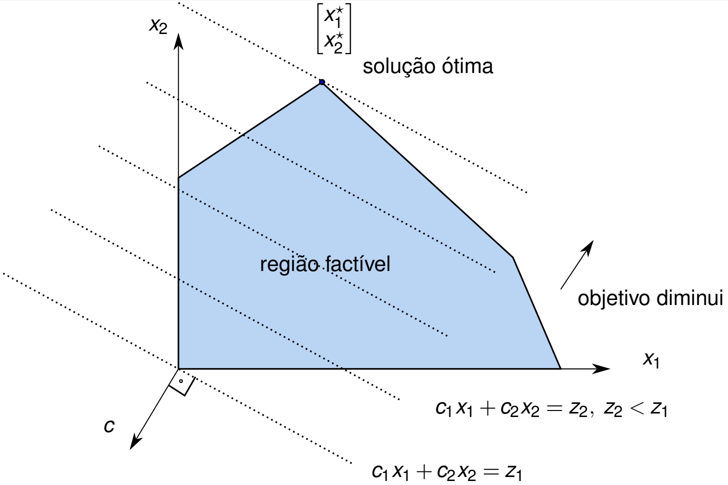
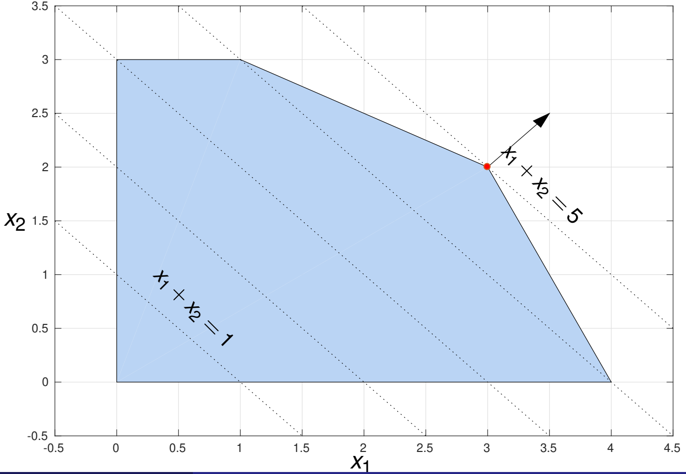


Figura 4: Solução Geométrica.

Solução do Problema de Planejamento (Sapateiro)

- Aplicando o método geométrico no problema de planejamento, temos a ilustração apresentada na Figura 5. O valor ótimo é $z = 5$ com $x_1 = 3$ (sapatos) e $x_2 = 2$ (botinas).



Possíveis resultados de um problema de PL

- Um problema de programação linear pode fornecer um dos quatro tipos de resultados listados a seguir.
  - Solução ótima única.
  - Múltiplas soluções ótimas.
  - Função objetivo ilimitada.
  - Infactibilidade.

Solução Ótima Única

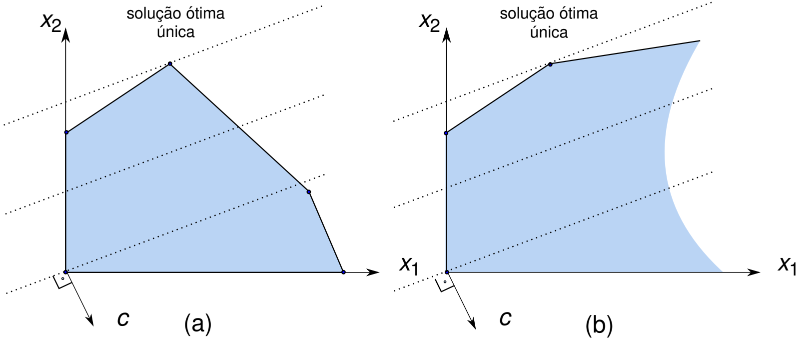


Figura 6: Soluções ótimas únicas; (a) região limitada; (b) região ilimitada.

Soluções Múltiplas

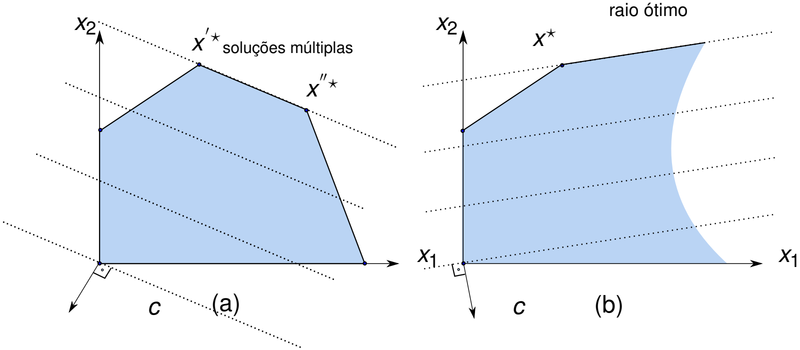


Figura 7: Soluções múltiplas; (a) região limitada; (b) região ilimitada.

Função Objetivo Ilimitada

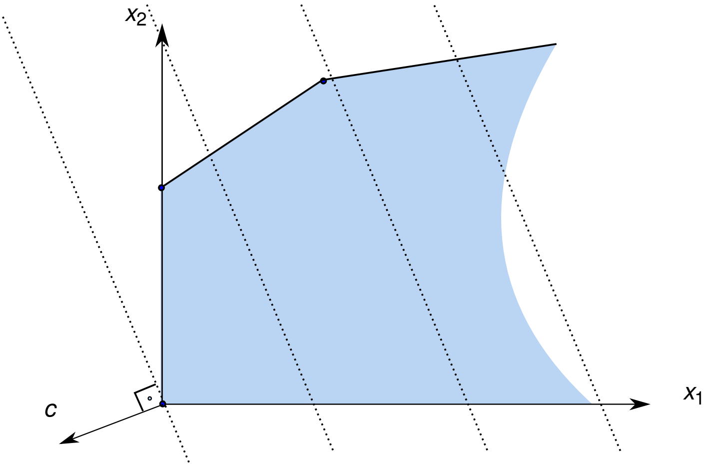


Figura 8: Função objetivo ilimitada. Os contornos da função objetivo podem se mover indefinidamente na direção $-c$, mantendo interseção com a região factível.

Problema Infactível

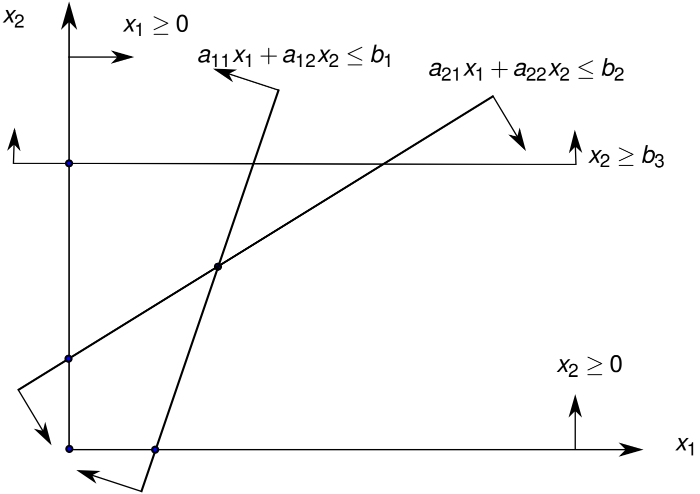


Figura 9: Solução infactível. O sistema de equações ou desigualdades que define a região factível é *inconsistente*.

Referências Bibliográficas

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali.
Linear Programming and Network Flows.
Jonh Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 4 edition, 2010.