IA881 – Otimização Linear

Aula: Dualidade em Programação Linear

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2023

Tópicos

O Problema da Dieta

- Considere a formulação do problema da dieta visto na aula Introdução à Programação Linear

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 25x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 33x_4 + 35x_5 \\
\text{s. a} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 42 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 24 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{array}{ll}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{array}
, \qquad
\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 25 & 35 & 50 & 33 & 35 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 42 \\ 24 \end{bmatrix}
$$

em que $x_i,\ i = 1,\ldots,5$ são alimentos que contêm uma certa quantidade de proteínas e sais minerais. A dieta requer uma quantidade mínima de 42 e 24 unidades de proteínas e sais minerais, respectivamente. Os custos de cada unidade de alimento aparecem na função objetivo, e a quantidade de proteínas e sais minerais contida em cada alimento aparece nas restrições. Por exemplo, uma unidade do alimento x_1 contém 3 unidades de proteínas e 2 unidades de sais minerais.

Nova Perspectiva do Problema da Dieta

- Uma indústria farmacêutica deseja propor uma alternativa para a realização da dieta, fornecendo pílulas que contêm as quantidades desejadas de proteínas e sais minerais. Assim o consumidor interessado na dieta poderia abrir mão de comprar os alimentos e realizar a dieta exclusivamente à base de pílulas. O problema que a indústria farmacêutica enfrenta é encontrar valores adequados w_1 e w_2 para as pílulas (unidades) de proteína e sais minerais, de modo a maximizar a receita ao mesmo tempo que é competitiva com a dieta alternativa com base em alimentos.

Por exemplo, considere o alimento x_1 e seus nutrientes. Para ser competitiva, a indústria deve considerar que o custo da quantidade de proteínas e sais suprida por x_1 não pode superar o valor de mercado de uma unidade do alimento x_1, isto é, $3w_1 + 2w_2 \leq 25$. Caso contrário seria mais vantajoso (do ponto de vista econômico) fazer a dieta por meio do alimento.

Formulação Dual

Criando restrições similares para todos os alimentos, e considerando que o consumidor irá comprar exatamente a quantidade de proteínas e sais que atende a necessidade (42 e 24), o problema da indústria pode ser formulado matematicamente como

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 42w_1 + 24w_2 \\
\text{s. a} \quad & 3w_1 + 2w_2 \leq 25 \\
& 4w_1 + 3w_2 \leq 35 \\
& 5w_1 + 4w_2 \leq 50 \\
& 3w_1 + 3w_2 \leq 33 \\
& 6w_1 + 3w_2 \leq 35 \\
& w_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\
s.\ a \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\
& \mathbf{w} \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\
s.\ a \quad & \mathbf{A}^T\mathbf{w} \leq \mathbf{c} \\
& \mathbf{w} \geq 0
\end{aligned}$$

Note que **A**, **b** e **c** são os mesmos definidos no problema original.

Dualidade Via Multiplicadores de Lagrange I

- A teoria de dualidade pode ser considerada como uma consequência natural do método dos multiplicadores de Lagrange, frequentemente utilizado em cálculo diferencial na minimização de funções sujeitas a restrições de igualdade. Por exemplo, considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & x^2 + y^2 \\ \text{s. a} & x + y = 1 \end{array}$$

Uma maneira de resolver é por meio da introdução de um multiplicador de Lagrange w, criando a chamada função Lagrangeana

$$L(x, y, p) = x^2 + y^2 + w(1 - x - y)$$

Minimizando a função Lagrangeana em função de x e y ($\partial L/\partial x = 0,\ \partial L/\partial y = 0$), tem-se a seguinte solução ótima $x = y = w/2$ (depende de w). Da restrição $x + y = 1$, tem-se que $w = 1$, e a solução ótima do problema original é $x = y = 1/2$.

- Traduzindo, a técnica dos multiplicadores de Lagrange consiste em permitir que a restrição $x + y = 1$ seja violada e associar a ela um multiplicador de Lagrange w, que vai ponderar a quantidade violada, isto é $1 - x - y$. Essa estratégia leva ao

Dualidade Via Multiplicadores de Lagrange II

problema de minimização irrestrito de $L(x, y, w)$. Quando w é escolhido de maneira apropriada ($w = 1$, no exemplo), a solução ótima do problema restrito também é a solução ótima do problema irrestrito. Em particular, para o valor específico de w determinado, a presença ou ausência da restrição ($x + y = 1$) não afeta o custo ótimo.

Claramente, a técnica pode ser aplicada à programação linear: associa-se um conjunto de variáveis w_i a cada restrição e procuram-se valores de w_i tais que a presença ou ausência das restrições não afeta o custo ótimo. O fato interessante é que a busca pelos valores apropriados de w_i também pode ser feita por um problema de programação linear (!), chamado de problema dual.

Lagrangeana do Problema Primal

- Considere o PL na forma padrão

$$
\begin{array}{ll}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq 0
\end{array}
\tag{1}
$$

considerado daqui em diante como *problema primal*, e seja $\mathbf{x}^\star$ uma solução ótima (assumi-se que ela existe). Constrói-se o problema *relaxado* em que a restrição $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é colocada como uma penalização na função objetivo, isto é,

$$
\begin{array}{ll}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\
s.\ a & \mathbf{x} \geq 0
\end{array}
\tag{2}
$$

sendo $\mathbf{w}$ um vetor de multiplicadores com a mesma dimensão de $\mathbf{b}$. Considerando $g(\mathbf{w})$ como o valor ótimo do problema relaxado em função de $\mathbf{w}$, tem-se

$$
g(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{x}\geq 0}\left[\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})\right] \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star + \mathbf{w}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^\star) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star
$$

Traduzindo, o valor $g(\mathbf{w})$ é sempre menor ou igual ao custo ótimo primal $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star$. Assim, qualquer $\mathbf{w}$ leva a um limitante inferior $g(\mathbf{w})$ para o custo ótimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star$ e o problema irrestrito $\max g(\mathbf{w})$ pode ser interpretado como a busca pelo melhor limitante inferior (mais próximo de $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star$), conhecido como *problema dual*.

Forma do Problema Dual

O principal resultado na teoria de dualidade assegura que o custo ótimo do problema dual é igual ao custo ótimo do problema primal. Ou seja, quando os multiplicadores são escolhidos de maneira ótima no problema dual, violar a restrição $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ não traz nenhuma vantagem (valor objetivo melhor).

- Utilizando a definição de $g(\mathbf{w})$, tem-se

$$\begin{aligned} g(\mathbf{w}) &= \min_{\mathbf{x} \geq 0} \left[\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{w}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \right] \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{b} + \min_{\mathbf{x} \geq 0} (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} \end{aligned}$$

Note que

$$\min_{\mathbf{x} \geq 0} (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A} \geq 0 \\ -\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, ao tentar maximizar o valor de $g(\mathbf{w})$ apenas é necessário considerar os valores de $\mathbf{w}$ tais que $g(\mathbf{w}) \neq -\infty$. Assim, conclui-se que o problema dual é um PL na forma

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ s.\ a & \mathbf{w}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \text{ irrestrito} \end{array}$$

Problema Primal na Forma Canônica

- Se o problema primal estiver na forma canônica, ou seja, com a restrição $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, é possível introduzir variáveis de excesso $\mathbf{Ax} - \mathbf{x}_s = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_s \geq 0$, e a restrição de igualdade pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

que leva às restrições duais

$$\mathbf{w}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T, \ \mathbf{w} \geq 0$$

- A partir dos resultados apresentados, é possível estabelecer duas formas (definições) importantes de dualidade (são equivalentes).

Forma Canônica de Dualidade

- **Forma Canônica de Dualidade**: Suponha que o problema primal é dado na forma (canônica):

$$P: \quad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

então o problema dual é definido na forma

$$D: \quad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ s.\ a & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

Note que existe exatamente uma variável dual para cada restrição do problema primal e exatamente uma restrição dual para cada variável primal.

- Exemplo:

$$P: \min \quad z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\text{s. a} \quad 3x_1 + x_2 \geq 4$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 7$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2$$

$$D: \max \quad z = 4w_1 + 7w_2$$
$$\text{s. a} \quad 3w_1 + 5w_2 \leq 6$$
$$w_1 + 2w_2 \leq 8$$
$$w_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2$$

Forma Padrão de Dualidade

- **Forma Padrão de Dualidade**: Outra definição equivalente de dualidade é dada para um problema primal dado na seguinte forma (padrão):

$$P: \quad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\,a & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

então o problema dual é definido na forma

$$D: \quad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ s.\,a & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \text{ irrestrito} \end{array} \tag{6}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{lrl} P: \min & z = 6x_1 + 8x_2 & \\ \text{s. a} & 3x_1 + x_2 - x_3 & = 4 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_4 & = 7 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} D: \max & z = 4w_1 + 7w_2 & \\ \text{s. a} & 3w_1 + 5w_2 & \leq 6 \\ & w_1 + 2w_2 & \leq 8 \\ & -w_1 & \leq 0 \\ & -w_2 & \leq 0 \\ & \mathbf{w} \text{ irrestrito} & \end{array}$$

Dual do Dual

- Considere o problema dual em sua forma canônica

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ s.\ a & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{array}$$

Aplicando as transformações vistas nas primeiras aulas, é possível reescrever esse problema na forma

$$\begin{array}{ll} \min & -\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{x}} \\ s.\ a & (-\mathbf{A}^T)\bar{\mathbf{x}} \geq -\mathbf{c} \\ & \bar{\mathbf{x}} \geq 0 \end{array}$$

O problema dual desse último problema é dado por

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T(-\mathbf{c}) \\ s.\ a & \mathbf{w}^T(-\mathbf{A})^T \leq (-\mathbf{b}^T) \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{w} \\ s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{w} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

que apresenta a estrutura do problema primal.

Teorema 1

O dual do dual é o primal.

Formas Mistas de Dualidade e Generalizações I

- Utilizando as técnicas vistas na primeira aula, é possível converter qualquer problema de programação linear na forma padrão ou canônica. Por exemplo, considere o problema

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\
\text{s. a} & A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 \geq b_1 \\
& A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 \leq b_2 \\
& A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 = b_3 \\
& x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \text{ irrestrito}
\end{array}
$$

Formas Mistas de Dualidade e Generalizações II

Para converter na forma canônica, multiplica-se a segunda desigualdade por -1, divide-se a terceira restrição em duas desigualdades e as seguintes mudanças de variáveis são realizadas $x_2 = -x_2'$, $x_3 = x_3' - x_3''$, levando a

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_1 x_1 - c_2 x_2' + c_3 x_3' - c_3 x_3'' \\ \text{s. a} & \begin{array}{rcl} A_{11} x_1 - A_{12} x_2' + A_{13} x_3' - A_{13} x_3'' & \geq & b_1 \\ -A_{21} x_1 + A_{22} x_2' - A_{23} x_3' + A_{23} x_3'' & \geq & -b_2 \\ A_{31} x_1 - A_{32} x_2' + A_{33} x_3' - A_{33} x_3'' & \geq & b_3 \\ -A_{31} x_1 + A_{32} x_2' - A_{33} x_3' + A_{33} x_3'' & \geq & -b_3 \end{array} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0 \end{array}$$

Formas Mistas de Dualidade e Generalizações III

Utilizando as seguintes variáveis duais w_1, w_2', w_3' e w_3'', tem-se a seguinte representação dual

$$\begin{array}{ll} \max & w_1 b_1 - w_2' b_2 + w_3' b_3 - w_3'' b_3 \\ \text{s. a} & \begin{array}{rcr} w_1 A_{11} - w_2' A_{21} + w_3' A_{31} - w_3'' A_{31} & \leq & c_1 \\ -w_1 A_{12} + w_2' A_{22} - w_3' A_{32} + w_3'' A_{32} & \leq & -c_2 \\ w_1 A_{13} - w_2' A_{23} + w_3' A_{33} - w_3'' A_{33} & \leq & c_3 \\ -w_1 A_{13} + w_2' A_{23} - w_3' A_{33} + w_3'' A_{33} & \leq & -c_3 \end{array} \\ & w_1 \geq 0,\ w_2' \geq 0,\ w_3' \geq 0,\ w_3'' \geq 0 \end{array}$$

Finalmente, utilizando as mudanças de variáveis $w_2 = -w_2'$ e $w_3 = w_3' - w_3''$, tem-se

$$\begin{array}{ll} \max & w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \\ \text{s. a} & w_1 A_{11} + w_2 A_{21} + w_3 A_{31} \leq c_1 \\ & w_1 A_{12} + w_2 A_{22} + w_3 A_{32} \geq c_2 \\ & w_1 A_{13} + w_2 A_{23} + w_3 A_{33} = c_3 \\ & w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0,\ w_3 \text{ irrestrito} \end{array}$$

Formas Mistas de Dualidade e Generalizações IV

Observando esse último problema e o primal original, percebe-se que cada transformação aplicada no problema primal leva a uma modificação no problema dual. Esse procedimento pode ser sistematizado conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1: Relações entre primal e dual .

	problema min		problema max	
variáveis	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	restrições
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	
	irrestrito	$\longleftrightarrow$	$=$	
restrições	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	variáveis
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	irrestrito	

Formas Mistas de Dualidade e Generalizações V

- Exemplo:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{s. a} & x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ & x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ irrestrito} \end{array}$$

Aplicando os resultados da tabela, tem-se

$$\begin{array}{rl} \min & z = 2w_1 - 4w_2 \\ \text{s. a} & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 2w_2 = -2 \\ & w_1 \leq 0,\ w_2 \text{ irrestrito} \end{array}$$

Dualidade Fraca

- Como visto no início da aula, o custo $g(\mathbf{w})$ associado a qualquer solução dual fornece um limitante inferior para o custo ótimo. O próximo resultado formaliza essa propriedade.

Teorema 2

Se $\mathbf{x}$ é uma solução factível para o problema primal e $\mathbf{w}$ é uma solução factível para o problema dual, então

$$\mathbf{w}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Para provar o resultado, considere $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ como soluções factíveis primais e duais, respectivamente, e defina

$$u_i = w_i(\mathbf{a}^i\mathbf{x} - b_i)$$
$$v_j = (\mathbf{c}_j - \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j)x_j$$

em que $\mathbf{a}^i$ indica a linha i da matriz $\mathbf{A}$.

Dualidade Fraca - Continuação

Da Tabela 1, observa-se que o sinal de w_i é o mesmo de $\mathbf{a}^i\mathbf{x} - b_i$. Similarmente, o sinal de x_j é o mesmo de $\mathbf{c}_j - \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j$. Assim, factibilidades primal e dual implicam que $u_i \geq 0$, $\forall i$ e $v_j \geq 0$, $\forall j$. Note que

$$\sum_i u_i = \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b}$$

$$\sum_j u_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Somando as duas igualdades e observando a não negatividade de u_i e v_j, tem-se

$$0 \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b}.$$

Portanto,

$$\mathbf{w}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Dualidade Fraca - Continuação

- Como ilustração, considere o exemplo

$$
\begin{aligned}
P:\min \quad & z = 6x_1 + 8x_2 \\
\text{s. a} \quad & 3x_1 + \ \ x_2 \geq 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 7 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
D:\max \quad & z = 4w_1 + 7w_2 \\
\text{s. a} \quad & 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\
& \ \ w_1 + 2w_2 \leq 8 \\
& w_i \geq 0,\ i = 1,\dots,2
\end{aligned}
$$

As soluções factíveis $\mathbf{x}_0 = [7/5, 0]^T$ e $\mathbf{w}_0 = [2, 0]^T$. Então $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = 42/5 = 8.4$ e $\mathbf{w}_0^T\mathbf{b} = 8$. Assim, a solução ótima para ambos os problemas tem valor objetivo entre 8 e 8.4. Essa propriedade pode ser utilizada para terminar um problema de programação linear por conta da proximidade do ótimo.

Outras Propriedades

- Outros resultados podem ser derivados a partir do teorema anterior.

Corolário 1

Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{w}_0$ são soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, tal que $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = \mathbf{w}_0^T\mathbf{b}$, então $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{w}_0$ são soluções ótimas para seus respectivos problemas.

Corolário 2

Se um dos problemas tem um valor objetivo ilimitado, então o outro problema não possui solução factível.

Dualidade Forte

- Um outro resultado, conhecido como dualidade forte, é apresentado a seguir

Corolário 3

Se um problema possui uma solução ótima, então ambos os problemas possuem soluções ótimas e os dois valores ótimos são iguais.

Para provar o resultado, considere um PL primal na forma padrão (matriz $\mathbf{A}$ com rank completo) e a existência de uma solução ótima. Aplicando o método Simplex nesse problema e evitando a ciclagem com as precauções necessárias, o método vai terminar com uma solução ótima $\mathbf{x}$ e uma base ótima $\mathbf{B}$. Seja $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ o vetor de variáveis básicas. O método termina pois o vetor de custos reduzidos é não positivo, portanto

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \leq 0$$

sendo que $\mathbf{c}_B$ é o vetor com os custos das variáveis básicas.

Dualidade Forte - Continuação

Definindo **w** como $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$, tem-se $\mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$, que mostra que **w** é uma solução factível para o problema dual

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ s.\ a & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{array}$$

Além disso,

$$\mathbf{w}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Pelo Corolário 3, **w** é uma solução ótima para o problema dual, com o mesmo valor da solução ótima do primal.

Teorema Fundamental da Dualidade

- Finalmente, temos o resultado mais importante no contexto de dualidade em programação linear, chamado de Teorema Fundamental da Dualidade:

Teorema 3

Com relação aos problemas de programação linear primal e dual, apenas uma das alternativas apresentadas a seguir é verdadeira:

1. *Ambos possuem soluções ótimas* $\mathbf{x}^\star$ *e* $\mathbf{w}^\star$ *com* $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star = \mathbf{w}^{\star T}\mathbf{b}$.
2. *Se um problema tem um valor objetivo ótimo ilimitado, o outro deve ser infactível.*
3. *Ambos os problemas são infactíveis.*

- O teorema anterior mostra que a dualidade não é completamente simétrica. Na melhor das hipóteses, podemos afirmar que

$$\begin{array}{ccccc} \text{P} & \text{ótimo} & \Leftrightarrow & \text{D} & \text{ótimo} \\ \text{P(D)} & \text{ilimitado} & \Rightarrow & \text{D(P)} & \text{infactível} \\ \text{P(D)} & \text{infactível} & \Leftrightarrow & \text{D(P)} & \text{ilimitado ou infactível} \end{array}$$

Folgas Complementares I

- Uma importante relação entre as soluções ótimas primal e dual é fornecida pelas condições das folgas complementares.

Teorema 4

Sejam $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{w}$ *soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente. Os vetores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{w}$ *são soluções ótimas para os respectivos problemas se, e somente se:*

$$w_i(\mathbf{a}^i\mathbf{x} - b_i) = 0, \quad \forall i,$$
$$(c_j - \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j)x_j = 0, \quad \forall j,$$

Na prova do Teorema 2, foi definido $u_i = w_i(\mathbf{a}^i\mathbf{x} - b_i)$ e $v_j = (\mathbf{c}_j - \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j)x_j$ e, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ factíveis, $u_i \geq 0$ e $v_j \geq 0$. Também foi mostrado que

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b} = \sum_i u_i + \sum_j v_j$$

Folgas Complementares II

Pela dualidade forte, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ são ótimos, então $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$, o que implica em $u_i = v_j = 0,\ \forall i, j$. Reciprocamente, se $u_i = v_j = 0,\ \forall i, j$, então $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$ e pelo Corolário 3, tem-se que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ são ótimos.

- A primeira condição do Teorema 4 está automaticamente satisfeita para qualquer solução factível de um PL primal na forma padrão. Se houverem restrições do tipo $\mathbf{a}^i\mathbf{x} \geq b_i$, então a condição de folga complementar associada garante que a variável dual correspondente w_i é nula, a não ser que a restrição esteja ativa.

- O teorema das folgas complementares também permite a determinação de uma solução dual ótima a partir de uma solução básica factível ótima não degenerada de um PL primal na forma padrão. Sejam x_j as variáveis básicas dessa solução primal. Então, da condição $(c_j - \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j)x_j = 0$ tem-se que $\mathbf{w}^T\mathbf{a}_j = c_j$ para todo j. As colunas básicas $\mathbf{a}_j$ são LI (formam a base $\mathbf{B}$) e o vetor $\mathbf{w}$ pode ser calculado (unicamente) por meio de $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$.

Exemplo

Exemplo

Considere o PL na forma padrão e seu dual

$$\begin{array}{ll} \min & z = 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s. a} & 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 \qquad\quad = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & z = 8w_1 + 3w_2 \\ \text{s. a} & 5w_1 + 3w_2 \leq 13 \\ & \ \ w_1 + \ \ w_2 \leq 10 \\ & 3w_1 \qquad\quad \leq \ \ 6 \\ & w \text{ irrestrito} \end{array}$$

Determine a solução ótima dual a partir da solução ótima primal não degenerada $\mathbf{x}^\star = [1, 0, 1]^T$.

Como $\mathbf{x}^\star = [1, 0, 1]^T$ é uma solução primal ótima não degenerada, utilizam-se as folgas complementares para encontrar a solução ótima para o dual. A condição $w_i(\mathbf{a}^i\mathbf{x}^\star - b_i) = 0$ está automaticamente satisfeita para todo i pois o PL primal está na forma padrão. A condição $(c_j - \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j)x_j^\star = 0$ está satisfeita para $j = 2$ pois $x_2^\star = 0$. Entretanto, como $x_1^\star > 0$ e $x_3^\star > 0$, é necessário que $5w_1 + 3w_2 = 13$ e $3w_1 = 6$, fornecendo $w_1 = 2$ e $w_2 = 1$. Note que essa é uma solução dual factível cujo custo vale 19, que é o mesmo custo de $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^\star$ (provando que $\mathbf{x}^\star$ é de fato ótimo).

Exemplo

Exemplo

Considere o par primal dual

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4w_1 + 3w_2 \\
\text{s. a} \quad & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\
& w_1 - 2w_2 \leq 3 \\
& 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\
& w_1 + w_2 \leq 2 \\
& 3w_1 + w_2 \leq 3 \\
& w_i \geq 0,\ i = 1, 2
\end{aligned}
$$

Determine a solução ótima primal a partir de uma solução gráfica do problema dual.

A representação gráfica da região factível do problema dual é mostrada na Figura 1. O vetor gradiente é dado por **b** e o vértice ótimo é $w^\star = [4/5, 3/5]^T$, com valor objetivo ótimo dado por $z^\star = 5$.

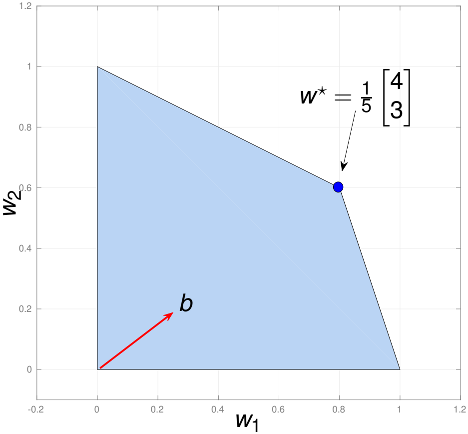

Figura 1: Região factível do problema dual.

Exemplo

Note que a segunda, terceira e quarta restrições duais no ponto $w^\star$ fornecem

$$\begin{aligned} w_1 - 2w_2 &\leq 3 & -0.4 &\leq 3 \\ 2w_1 + 3w_2 &\leq 5 \Rightarrow & 3.4 &\leq 5 \\ w_1 + w_2 &\leq 2 & 1.4 &\leq 2 \end{aligned}$$

indicando que as mesmas não estão ativas. Portanto, pelo teorema das folgas complementares, $x_2^\star = x_3^\star = x_4^\star = 0$. Além disso, como $w_1^\star \geq 0$ e $w_2^\star \geq 0$, tem-se que $x_1^\star + 3x_5^\star = 4$ e $2x_1^\star + x_5^\star = 3$, o que fornece $x_1^\star = x_5^\star = 1$.

Revisitando o Problema da Dieta I

Considere o problema da dieta formulado do ponto de vista da indústria farmacêutica, isto é

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & z = 42x_1 + 24x_2 \\ \text{s. a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 25 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 50 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

sendo tratado agora como o problema primal. A Figura 2 ilustra a região factível do problema, a direção do vetor gradiente $\mathbf{c} = [42 \ 24]^T$ e o ponto extremo ótimo $\mathbf{x}^\star$.

Revisitando o Problema da Dieta II

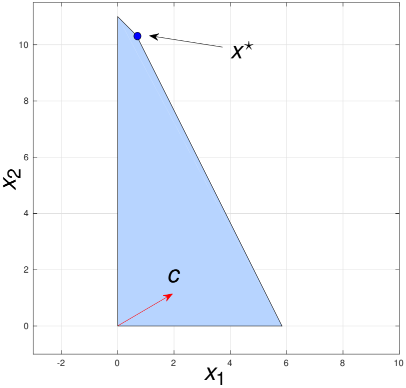

Figura 2: Região factível do problema da dieta (ponto de vista da indústria farmacêutica).

Revisitando o Problema da Dieta III

Mudando o sinal da função objetivo e introduzindo variáveis de folga, aplica-se o método Simplex, que fornece (para as variáveis originais)

$$\mathbf{x}^\star = \begin{bmatrix}2/3 & 31/3\end{bmatrix}^T, \quad z^\star = 276$$

Substituindo $\mathbf{x}^\star$ nas restrições, tem-se

$$22.66 \leq 25, \quad 33.66 \leq 35, \quad 44.66 \leq 50, \quad 33 \leq 33, \quad 35 \leq 35$$

indicando que apenas duas restrições estão ativas. Pelo teorema da folgas complementares, tem-se necessariamente que $w_1^\star = w_2^\star = w_3^\star = 0$ no problema dual (formulação do ponto de vista do consumidor). O fato de $w_1^\star = w_2^\star = w_3^\star = 0$ pode ser interpretado pela indústria farmacêutica que as três primeiras restrições não têm nenhuma influência na determinação dos valores ótimos para $x_1^\star$ e $x_2^\star$ (valor das pílulas de proteínas e sais minerais). Portanto, o custo ótimo $z^\star$ pode se manter mesmo diante de pequenas violações nas três primeiras restrições (por exemplo, no valor dos alimentos). Em resumo, no cenário atual, apenas os valores dos produtos quatro e cinco é que estão sendo determinantes na estipulação dos preços das pílulas.

Revisitando o Problema da Dieta IV

Como $x_1^\star > 0$ e $x_2^\star > 0$, também do teorema das folgas complementares é necessário que as restrições duais sejam atendidas na igualdade na solução ótima dual, isto é,

$$3w_1^\star + 4w_2^\star + 5w_3^\star + 3w_4^\star + 6w_5^\star = 42$$
$$2w_1^\star + 3w_2^\star + 4w_3^\star + 3w_4^\star + 3w_5^\star = 24$$

o que fornece, $w_4^\star = 2$ e $w_5^\star = 6$.

Uma Visão Geométrica do Par (x, w) I

- Apresenta-se uma visão geométrica dos pares de vetores **x** e **w** sem a necessidade de recorrer ao esboço gráfico da região factível do dual. Considere o problema primal na forma

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\ a & \mathbf{a}^i\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m \end{array}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Assume-se que os vetores (linha) $\mathbf{a}^i$ geram o $\mathbb{R}^n$. O problema dual é dado por

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ s.\ a & \mathbf{w}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ s.\ a & \sum_{i=1}^{m} w_i\mathbf{a}^i = \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{array}$$

Dado um conjunto de n linhas $\mathbf{a}^i$ linearmente independentes, denotado por I, é possível construir uma solução (única) $\bar{\mathbf{x}}$ a partir de $\mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i,\ i \in I$, que é uma solução básica para o problema primal. Assume-se que $\bar{\mathbf{x}}$ é uma solução não degenerada (isto é, $\mathbf{a}^i\mathbf{x} \neq b_i,\ i \notin I$).

Uma Visão Geométrica do Par (x, w) II

Seja $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ um vetor de variáveis duais (não necessariamente dual factível). Para que $\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{w}$ sejam soluções ótimas para seus respectivos problemas, é necessário que

(a)	$\mathbf{a}^i \bar{\mathbf{x}} \geq b_i, \ \forall i,$	(factibilidade primal)
(b)	$w_i = 0$, para todo $i \notin I$,	(folga complementar)
(c)	$\sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{a}^i = \mathbf{c}^T,$	(factibilidade dual)
(d)	$\mathbf{w} \geq 0.$	(factibilidade dual)

Em função da condição (b), a condição (c) pode ser reduzida a

$$\sum_{i \in I} w_i \mathbf{a}^i = \mathbf{c}^T,$$

possuindo uma solução única (e básica) $\bar{\mathbf{w}}$ pois os vetores $\mathbf{a}^i$ com $i \in I$ são linearmente independentes (formam uma base para o problema dual). Para que o vetor $\bar{\mathbf{w}}$ seja dual factível, ele precisa ser não negativo. Com a condição (b) satisfeita, a factibilidade do vetor $\bar{\mathbf{w}}$ é equivalente ao vetor $\mathbf{c}$ ser uma combinação não negativa dos vetores $\mathbf{a}^i$, $i \in I$, associados às restrições primais ativas, como ilustra a Figura 3.

Uma Visão Geométrica do Par (x, w) III

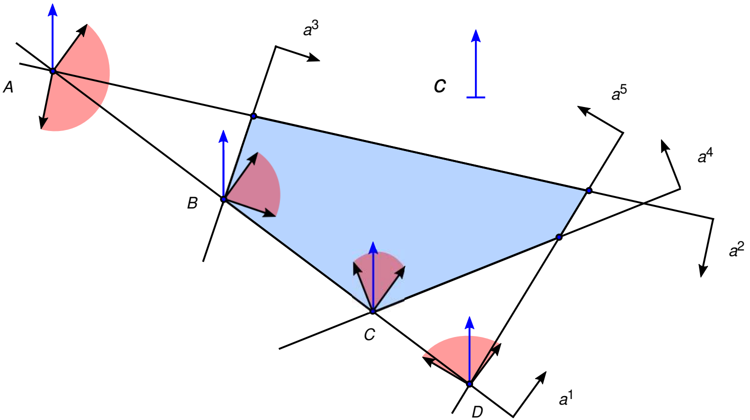

Figura 3: Região factível do problema primal e representação geométrica das restrições duais.

Uma Visão Geométrica do Par (x, w) IV

A figura mostra um caso particular com $n = 2$ variáveis e $m = 5$ restrições e nenhum vetor $\mathbf{a}^i$ é colinear. Para cada subconjunto I formado por dois elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ existem soluções básicas primal $\bar{\mathbf{x}}$ e dual $\bar{\mathbf{w}}$. A seguir são analisados os vértices A, B, C e D.

- A $I = \{1, 2\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ é primal infactível e $\bar{\mathbf{w}}$ é dual infactível pois $\mathbf{c}$ não pode ser expresso como uma combinação não negativa dos vetores $\mathbf{a}^1$ e $\mathbf{a}^2$.
- B $I = \{1, 3\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ é primal factível e $\bar{\mathbf{w}}$ é dual infactível.
- C $I = \{1, 4\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ é primal factível e $\bar{\mathbf{w}}$ é dual factível pois $\mathbf{c}$ pode ser expresso como uma combinação não negativa dos vetores $\mathbf{a}^1$ e $\mathbf{a}^4$.
- D $I = \{1, 3\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ é primal infactível e $\bar{\mathbf{w}}$ é dual factível.

Seja $\mathbf{x}^*$ uma solução básica primal degenerada. Nesse caso pode haver diversos subconjuntos I tais que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$. Utilizando diferentes subconjuntos I, é possível obter diversas soluções básicas duais $\bar{\mathbf{w}}$. Pode acontecer de algumas soluções $\bar{\mathbf{w}}$ serem factíveis e outras não, como ilustra a Figura 4. Contudo, se $\bar{\mathbf{w}}$ é factível (todos os $\bar{w}_i$ são não negativos) e se $\mathbf{x}^*$ é primal factível, então ambos são ótimos, pois a condição das folgas complementares foi considerada.

Uma Visão Geométrica do Par (x, w) V

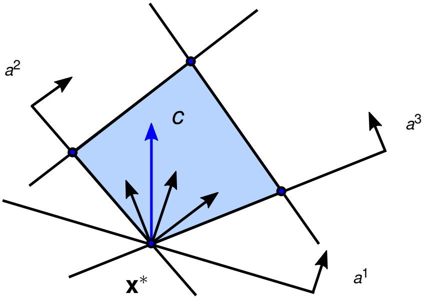

Figura 4: Região factível do problema primal e representação geométrica das restrições duais.