

Lista Lyapunov

1.1 Considere o sistema de segunda ordem dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1 = f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

com $\mu > 0$.

- (a) Determine os pontos de equilíbrio;
- (b) Linearize o sistema em torno dos pontos de equilíbrio e avalie a estabilidade.

1.2 a) Determine para a função $v(x_1, x_2) = x_1^2 + 2ax_1x_2 + bx_2^2$ quais faixas de valores os escalares reais a e b devem satisfazer para que $v(x_1, x_2) > 0, \forall x \neq 0$. Essas faixas definem conjuntos convexos? Justifique a resposta.

1.3 b) Usando os comandos `meshgrid`, `mesh` e `contour` do Matlab, ilustre as formas quadráticas abaixo

$$i) v_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad ii) v(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix};$$

$$iii) v(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1x_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & 18 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 & 10 & 9 \\ 0 & -1 & 10 & 25 & 18 \\ -3 & 3 & 9 & 18 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix};$$

$$iv) v(x_1, x_2) = \frac{4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1^4 + x_2^4}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

% Exemplo de código

```
x1=-5:0.1:5; x2=x1;
[X1,X2]=meshgrid(x1,x2);
Z=3*X1.^2-4*X1.*X2+6*X2.^2;
mesh(X1,X2,Z);
```

1.4 Utilizando como função de Lyapunov $v(x) = x^2$, analise a estabilidade da origem nos sistemas abaixo (se for o caso, também em função do parâmetro β):

$$i) \dot{x} = (\beta^2 - 5)x^3; \quad ii) \dot{x} = -x + x^3$$

1.5 Utilizando funções $v(x_1, x_2)$ quadráticas, mostre para os sistemas abaixo que a origem é assintoticamente estável e investigue se essa propriedade é global.

$$i) \quad \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

$$ii) \quad \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

iii) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1$

Sugestão: use funções quadráticas na forma $v(x_1, x_2) = 0.5ax_1^2 + 0.5bx_2^2$, $a > 0$ e $b > 0$, escolhendo (se for conveniente) valores particulares para a e b .

1.6 Utilizando a função de Lyapunov $v(x_1, x_2) = 0.5x_1^2 + 0.5x_2^2$, mostre que a origem $(0, 0)$ do sistema abaixo é assintoticamente estável.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^2$$