

IA363 – Tópicos em Controle IV, Tema: Estabilidade e controle de sistemas dinâmicos por meio da programação semidefinida

Tópico: Teoria de estabilidade de Lyapunov

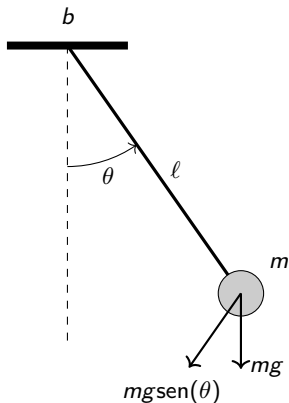
Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

- 1 Introdução
- 2 Definições e Estabilidade
- 3 Lyapunov
- 4 Região de Atração

Motivação

- Pêndulo simples amortecido.



Equação do movimento:

$$m\ell^2\ddot{\theta}(t) + b\ell^2\dot{\theta}(t) + mg\ell\sin(\theta)(t) = 0$$

Em espaço de estados: $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{m}x_2(t),$$

Motivação

- Se o pêndulo for solto nas posições $\theta \in \{0, \pi\}$ com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$), permanece nessas posições indefinidamente (está em um ponto de equilíbrio).
- Mas o que acontece se o pêndulo for solto em outra posição? É possível fazer alguma **previsão** sobre a evolução de $(\theta, \dot{\theta})$ ao longo do tempo para qualquer condição inicial?
- A resposta seria sim: *i)* se uma solução analítica para $\theta(t)$ estivesse disponível; *ii)* por meio de simulações numéricas.
- Infelizmente soluções analíticas não existem para sistemas não lineares no caso geral. Além disso, simulações numéricas são limitadas a sistemas de pequenas dimensões.
- Mesmo sem o auxílio de soluções analíticas e simulações, seria possível estabelecer **limites** para θ e $\dot{\theta}$ dada uma condição inicial, e além disso, determinar **valores assintóticos** (quando $t \rightarrow \infty$)?

Simulação

- Com computadores e algoritmos de cálculo numérico modernos, simulações podem ser obtidas, como mostrado a seguir ($g = 9,81$; $\ell = 1$; $b = 0,9$; $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (\pi/3, 0)$)

Simulação

- Eliminando o atrito ($b = 0$), tem-se o movimento não amortecido mostrado a seguir.

Energia

- A partir do cálculo da energia do sistema, é possível verificar se os valores de θ e $\dot{\theta}$ são limitados, e investigar os comportamentos assintóticos.
- Calculando a energia total (E) do pêndulo, isto é, energia cinética (T) mais a energia potencial (U), tem-se (o ponto mais baixo da trajetória ($\theta = 0$) corresponde a $U = 0$)

$$E(\theta, \dot{\theta}) = T + U = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos(\theta))$$

Tomando a derivada de $E(\theta, \dot{\theta})$ em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{E} = m\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta) \dot{\theta} = \dot{\theta} (m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta))$$

Energia

- Explorando a equação dinâmica inicial, tem-se

$$\dot{E} = \dot{\theta}(-b\ell^2\dot{\theta})$$

- Se $b = 0$, então $\dot{E} = 0$, implicando em energia constante (sistema conservativo).
- Se $b > 0$, então $\dot{E} \leq 0$. A energia nunca cresce e decresce sempre que $\dot{\theta} \neq 0$, indicando que θ e $\dot{\theta}$ convergem para zero com o passar do tempo.
- Lyapunov: generaliza a estratégia baseada na análise da função de energia para determinar o comportamento de trajetórias inicializadas suficientemente próximas do ponto de equilíbrio.
- Por conveniência, é usual trabalhar com $x_e = 0$, pois um ponto de equilíbrio arbitrário pode ser translado para a origem utilizando uma mudança de coordenadas.

Ponto de Equilíbrio

Seja o sistema (campo vetorial) autônomo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

em que $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mapa localmente Lipschitz de um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 1

$x_e = 0$ é ponto de equilíbrio de (1) se

$$f(0) = 0$$

- Um ponto de equilíbrio pode ser estável (assintoticamente ou não) ou instável.

- Seja $\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, a distância de x à origem.

Definição 2

O ponto de equilíbrio $x_e = 0$ de (1) é:

- *estável* se, para $\epsilon > 0$, existir $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $\forall x(0)$

$$\|x(0)\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x(0)\| < \epsilon, \forall t \geq 0;$$

- *instável* se não é estável;
- *assintoticamente estável* se for estável e, além disso, se existir $\delta > 0$ tal que $\forall x(0)$

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Estabilidade

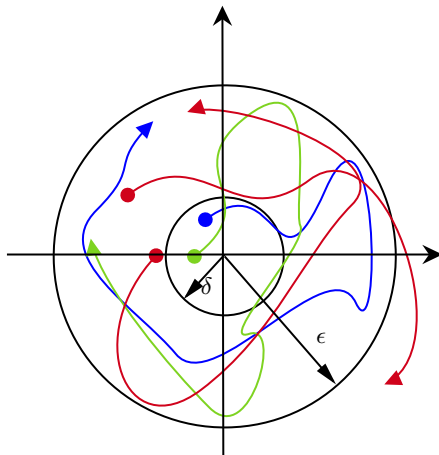


Figura: Trajetórias partindo da bola de raio δ permanecem dentro da bola de raio ϵ .

Estabilidade Assintótica

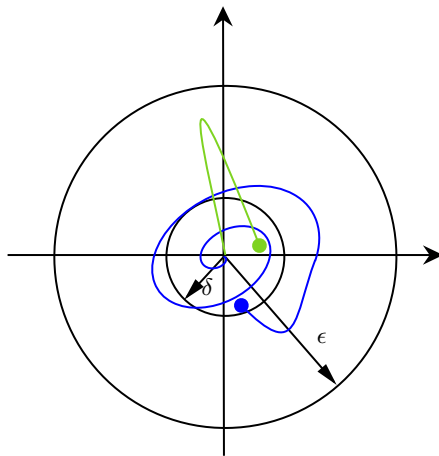


Figura: Trajetórias partindo da bola de raio δ convergindo para a origem.

Análise dos Pontos de Equilíbrio do Pêndulo

- Para o caso não amortecido ($b = 0$), o ponto de equilíbrio $x_e = (0,0)$ é estável, pois, para condições iniciais suficientemente próximas de x_e , as trajetórias permanecem dentro de uma bola de raio arbitrariamente pequeno centrada em x_e . Entretanto, x_e não é assintoticamente estável.
- Quando $b > 0$, o ponto $x_e = (0,0)$ torna-se assintoticamente estável, uma vez que, além de satisfazer a propriedade de estabilidade, as trajetórias iniciadas nas proximidades de x_e convergem para a origem à medida que o tempo tende ao infinito.
- O ponto de equilíbrio $x_e = (\pi,0)$ é instável, pois é possível escolher um $\epsilon > 0$ tal que não existe $\delta > 0$ capaz de garantir que a trajetória permaneça dentro da bola de raio ϵ , ou seja, a condição de estabilidade não é satisfeita.

Lyapunov (1892)

■ Lyapunov mostrou que certas funções podem ser usadas no lugar da função de energia na análise de pontos de equilíbrio.

■ Seja $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável definida no domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ contendo o ponto de equilíbrio $x_e = 0$. A derivada de V ao longo das trajetórias de (1), denotada por $\dot{V}(x)$, é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x}^T f(x)\end{aligned}$$

■ Se $\dot{V}(x)$ é negativa, então V vai decrescer ao longo da solução de (1).

Condição de Estabilidade

Teorema 1

Seja $x_e = 0$ um ponto de equilíbrio de (1) e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo a origem. Se existir uma função continuamente diferenciável $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{D}, x \neq 0$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{D}$$

então $x_e = 0$ é *estável*. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in \mathcal{D}, x \neq 0$$

então $x_e = 0$ é *assintoticamente estável*.

Rascunho da Prova

- Sejam B_ϵ e B_δ bolas de raios ϵ e δ , respectivamente, com $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$,
Objetivo: mostrar que trajetórias começando em B_δ nunca saem de $B_\epsilon \subset \mathcal{D}$.
Estratégia: **usar os conjuntos de nível de $V(x)$ como substitutos das bolas.**

- Escolha $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon \subset \mathcal{D}$. Como $V(x)$ é contínua e positiva, na fronteira da bola B_ϵ é positiva e tem um ponto de mínimo positivo, isto é

$$m_\epsilon = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x) > 0$$

- Considere o conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathcal{D} : V(x) \leq c\}$ com $0 < c < m_\epsilon$, que garante $\Omega_c \subset B_\epsilon$.

- Como $V(x)$ é continua com $V(0) = 0$, existe uma bola pequena B_δ tal que $x \in B_\delta \Rightarrow V(x) \leq c$, isto é, $B_\delta \subset \Omega_c$. Portanto $B_\delta \subset \Omega_c \subset B_\epsilon$.

- Seja $\dot{V}(x) \leq 0$, então $V(x)$ nunca aumenta. Logo $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq c$.
Conclusão:

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_c \Rightarrow x(t) \in \Omega_c \Rightarrow x(t) \in B_\epsilon$$

Visualização Geométrica da Prova

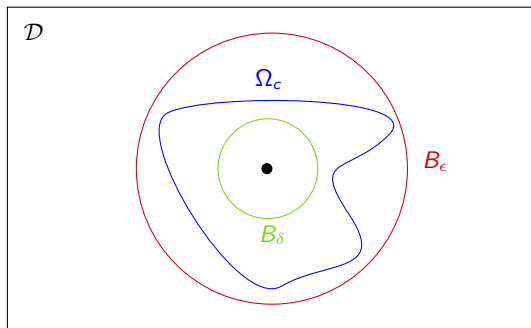


Figura: Visualização dos conjuntos usados na prova do teorema de Lyapunov;
 $B_\delta \subset \Omega_c \subset B_\epsilon \subset \mathcal{D}$.

Interpretação

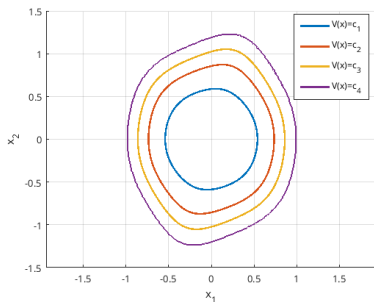


Figura: Curvas de níveis de $V(x) = c_i$, $0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$.

- Uma trajetória que entra em uma curva de nível $V(x) = c_i$ não sai mais do conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R} : V(x) \leq c_i\}$ se $\dot{V}(x) \leq 0$. Não há garantia de que a trajetória converge para a origem.
- Se $\dot{V}(x) < 0$, então a trajetória progride para curvas de níveis com c_i menores, mostrando que a trajetória converge para a origem.

Observações

- É comum empregar funções $V(x)$ **quadráticas** no estado como primeira candidata a função de Lyapunov para um determinado sistema.
- A positividade de funções quadráticas, isto é, $V(x) = x^T P x$, pode ser verificada de forma eficiente. Quando P é conhecida, pode-se utilizar o critério dos menores principais líderes. Quando P é uma variável a ser determinada, o teste pode ser formulado como um problema de otimização **convexo**.
- Embora o teorema de Lyapunov possa ser aplicado sem a necessidade de resolver explicitamente a equação diferencial em (1), o teste é apenas **suficiente** no caso de $f(x)$ geral. Isto é, caso uma função candidata não satisfaça as condições do teorema, não se pode concluir que o ponto de equilíbrio seja instável.

Retornando ao pêndulo I

- Considere o modelo do pêndulo (em espaço de estados) amortecido ($b > 0$) com $m = 1$, $\ell = 1$, $g = 9,81$ e $b = 0,5$, e a função de Lyapunov candidata

$$V(x) = (g/\ell)(1 - \cos(x_1)) + 0.5x_2^2$$

Verifica-se que $V(0) = 0$ e que $V(x)$ é definida positiva no domínio

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 2\pi\}$$

- Calculando $\dot{V}(x)$, tem-se

$$\dot{V}(x) = (g/\ell)\dot{x}_1 \sin(x_1) + x_2 \dot{x}_2 = -(b/m)x_2^2$$

Conclusão: $V(x)$ não é estritamente negativa, pois $\dot{V}(x)$ é nula para $x_2 = 0$ e qualquer valor de x_1 (deveria ser anula apenas se $x_1 = x_2 = 0$). Conclui-se apenas sobre a estabilidade.

- Considere a função de Lyapunov candidata modificada

$$\begin{aligned} V(x) &= 0.5x'Px + (g/\ell)(1 - \cos(x_1)) \\ &= 0.5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0.5(b/m)^2 & 0.5(b/m) \\ 0.5(b/m) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (b/m)(1 - \cos(x_1)) \end{aligned}$$

Retornando ao pêndulo II

Calculando $\dot{V}(x)$, tem-se

$$\dot{V}(x) = -0.5 \frac{gb}{\ell m} x_1 \sin(x_1) - 0.5(b/\ell)x_2^2$$

Tomando $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \pi\}$, tem-se que $V(x)$ é positiva e $\dot{V}(x)$ é negativa em $\mathcal{D}$. A origem é assintoticamente estável.

Simulação de $V(x)$

Curvas de níveis

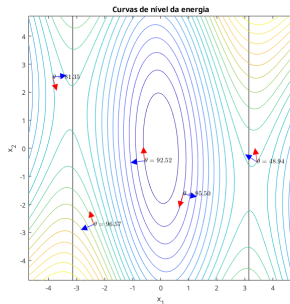


Figura: Curvas de níveis de $V(x)$ e ângulo θ entre ∇V e $\dot{x}$ em alguns pontos.

Estabilidade assintótica global

- Teste de estabilidade assintótica para $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, isto é, estabilidade global.

Teorema 2

Seja $x_e = 0$ um ponto de equilíbrio de (1) e $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \\ \|x\| \rightarrow \infty &\Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \\ \dot{V}(x) &< 0, \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

então $x_e = 0$ é *globalmente* assintoticamente estável.

- Uma função $V(x)$ que satisfaz (2) é chamada de *radialmente ilimitada*. Com isso garante-se que Ω_c é limitado e que as trajetórias permanecem limitadas.

Estabilidade via Linearização

- É possível aproximar o modelo não linear em (1) por um **modelo linearizado** no entorno do ponto de equilíbrio $x_e = 0$, dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

- Esse modelo linear é útil na avaliação da estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio.

Teorema 3 (Método indireto de Lyapunov)

Seja $x_e = 0$ um ponto de equilíbrio de (1) em que $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável e $\mathcal{D}$ é uma vizinhança da origem. Então:

- A origem é **assintoticamente estável** se a parte real dos autovalores de A é negativa;
- A origem é **instável** se pelo menos um dos autovalores de A tiver parte real positiva.
- Se

Linearização do Pêndulo I

- Considere a equação dinâmica de estados do pêndulo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{b}{m}x_2 - \frac{g}{\ell} \sin x_1 \end{pmatrix} = f(x).$$

- Linearizando no ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$, tem-se

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \bigg|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos x_1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \bigg|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizado

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x$$

O polinômio característico é:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{g}{\ell} = 0$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz, as raízes têm parte real negativa se e somente se $b/m > 0$ e $g/\ell > 0$. A origem é assintoticamente estável.

Região de Atração I

- Para pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, é frequente o interesse em determinar o quanto a trajetória pode se afastar do equilíbrio e ainda sim convergir com o passar do tempo.
- Essa necessidade dá origem à definição da **Região de Atração** (também chamada de domínio, ou bacia, de atração, ou região de estabilidade assintótica).
- Seja $\phi(t,x)$ uma solução de (1) que começa em um estado inicial no tempo $t = 0$.

Definição 3 (Região de Atração)

A região de atração do ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é definida como o conjunto de todos os pontos x tais que $\phi(t,x)$ é definida para todo $t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t,x) = 0$.

- Calcular a região de atração analiticamente pode ser uma tarefa desafiadora ou até mesmo impossível no caso geral. Contudo, funções de Lyapunov podem ser utilizadas para produzir **estimativas** da região da atração de uma forma computacionalmente eficiente.
- Do material apresentado anteriormente, se existir uma função de Lyapunov que satisfaz as condições de estabilidade assintótica em um domínio $\mathcal{D}$ e, se

Região de Atração II

$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ é limitado e está contido em $\mathcal{D}$, então toda trajetória iniciada em Ω_c permanece em Ω_c e converge para o ponto de equilíbrio à medida que $t \rightarrow \infty$.

- Ω_c pode ser uma estimativa **conservadora** para a região de atração em muitos casos.
- O cálculo de Ω_c com $V(x)$ quadrática em x pode ser realizado por meio de LMIs de modo geral.
- Para $f(x)$ polinomial, a determinação de Ω_c com $V(x)$ polinomial (grau genérico) pode ser realizada utilizando a técnica conhecida como decomposição por soma de quadrados (do inglês, **Sum-of-Squares — SOS**). Essa abordagem pode ser formulada em termos de programação semidefinida.

Região de Atração do Pêndulo

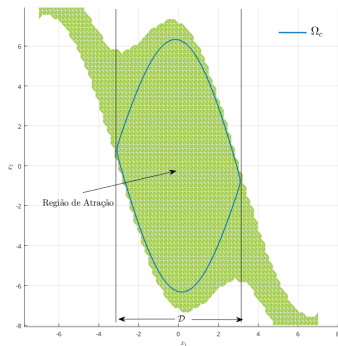


Figura: Região de atração estimada por *grid* (verde) e pelo conjunto Ω_c (azul) com $c = 19.9$.

Sistemas Lineares I

■ No caso de sistemas lineares, isto é, $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é **necessário e suficiente** procurar por uma função de Lyapunov quadrática na forma $V(x) = x'Px$ para classificar a estabilidade da origem.

■ Teste de estabilidade assintótica: existe P tal que

$$P > 0, A'P + PA < 0$$

■ Desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs).

■ Se o sistema é assintoticamente estável, então $x_e = 0$ é o único ponto de equilíbrio e a região de atração é o próprio $\mathbb{R}^n$, isto é, o sistema é **globalmente estável**.

■ Neste curso investiga-se o sistema linear incerto $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, sendo $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz incerta.

■ Em quase todos os casos abordados no curso $V(x)$ na forma quadrática também é necessária e suficiente, mas precisa depender da incerteza (α). Nesse caso $V(x, \alpha)$ é chamada de uma **função de Lyapunov dependente de parâmetros**.

Referências

-  W. M. Haddad and V. Chellaboina.
Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach.
Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2008.
-  H. K. Khalil.
Nonlinear Systems.
Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2002.
-  J.-J. E. Slotine and W. Li.
Applied Nonlinear Control.
Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.