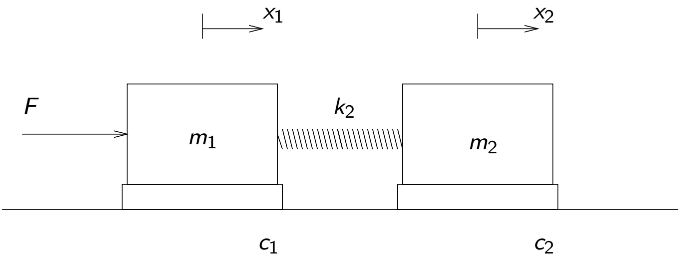
EA722 - Laboratório de Controle e Servomecanismos

Realimentação de Estados

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2017

Considere o sistema retilíneo



$m_1 = m_2 = 2.77$ kg
$c_1 = 2.1$ N/(m/seg), $c_2 = 1.2$ N/(m/seg)
$k_2 = 390$ N/m
$F = F(t)$: **variável de controle** (N)

- O **estado** do sistema em qualquer instante de tempo t é caracterizado pelas quantidades - **variáveis de estado** - $x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t)$
- O comportamento do sistema para $t \geq t_0$ depende apenas de $x(t_0) = (x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0))$ e de $F(t),\ t \geq t_0$
- Representação **interna** do sistema

- Análise e projeto de controladores no **domínio do tempo**, ao invés da abordagem clássica no **domínio da frequência**
- A variável de controle $u(t)$ é determinada a partir de **realimentação de estado**

$$u(t) = \phi(x(t))$$

ou de **realimentação de saída** (quantidades efetivamente **medidas**)

$$u(t) = \psi(y(t))$$

- **Exemplo:** a saída do sistema retilíneo pode ser definida como

$$y(t) = x_1(t) \quad \text{ou} \quad y(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

- Na representação frequencial - **entrada-saída** -, apenas realimentação de saída
- A representação temporal por variáveis de estado complementa a representação frequencial e permite tratar **sistemas multivariáveis** (mais de uma entrada e/ou mais de uma saída) de forma mais simples

O comportamento do sistema retilíneo é regido por

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) = F$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

- Variável de controle: $u(t) = F(t)/k_{hw}$ ($u(t)$ em volts)
- Variáveis de estado: $x_1(t), \dot{x}_1(x), x_2(t), \dot{x}_2(t)$
- Variáveis de saída: $y(t) = x_1(t)$ (por exemplo)

Seja o **vetor de estados**

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Então

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2 \\
&m_1 \dot{z}_2 + c_1 z_2 + k_2 (z_1 - z_3) = k_{hw} u(t) \\
&\dot{z}_3 = z_4 \\
&m_2 \dot{z}_4 + c_2 z_4 + k_2 (z_3 - z_1) = 0
\end{aligned}
$$

- 4 equações diferenciais de 1a ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{c_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_{hw}}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] z(t)$$

Forma matricial compacta

$$\dot{z} = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0$$
$$y(t) = Cz(t)$$

Função de Transferência I

Transformada de Laplace com ci's nulas

$$sZ(s) = AZ(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CZ(s)$$

Função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X_1(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$
$$= \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B}{\det\text{(sI-A)}}$$

- Se não existirem divisores comuns entre $C\,\mathrm{adj}(sI - A)B$ e $\det\text{(sI-A)}$, então as raízes de

$$\det\text{(sI-A)} = 0$$

  são os **pólos** do sistema em malha aberta

- Para que não haja cancelamentos, o sistema deve ser ao mesmo tempo
  - **Completamente controlável:**

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

  - **Completamente observável:**

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} = n$$

$$u(t) = -Kz(t) + r(t), \quad t \geq 0$$

sendo que

Sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A - BK)z(t) + Br(t), \quad z(0) = z_0 \\ y(t) &= Cz(t) \end{aligned}$$

Função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C\,\mathrm{adj}[sI - (A - BK)]B}{\det[sI - (A - BK)]}$$

e os pólos do sistema em malha fechada serão as raízes de

$$\det\left[sI - (A - BK)\right] = 0$$

que dependem de A, B e do ganho de realimentação K

- K pode ser o resultado da otimização de algum **critério de desempenho**. Exemplo: determina-se K de forma que o valor da integral

$$\int_0^\infty \{x_1(t)^2 + ru(t)^2\}dt, \quad r > 0$$

seja mínimo (**regulador linear-quadrático**)

- K pode ser escolhido para alocar os pólos de malha fechada em posições desejadas

Controle por alocação de pólos I

- Seja $p(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$ o polinômio cujas n raízes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os pólos desejados para a malha fechada

- Determina-se então K de forma que

$$\det[sI - (A - BK)] = p(s)$$

- $\det[sI - (A - BK)]$ é um polinômio de grau n; os coeficientes dos termos em s^n são iguais a 1

- Restam n coeficientes e existem n ganhos $k_1, k_2, \ldots, k_n$; gera-se um sistema com n equações e n incógnitas

- O sistema de equações sempre terá solução para **qualquer** $p(s)$ se o sistema for **completamente controlável**

Exemplo I

Considere o sistema retilíneo com o carro #2 **travado**:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{c_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_{hw}}{m_1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -140.8 & -0.768 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4621 \end{bmatrix}$$

Exemplo II

$$
\begin{aligned}
sI-(A-BK) &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \\
&- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -140.8 & -0.768 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4621k_1 & 4621k_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 140.8+4621k_1 & s+0.768+4621k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Então

$$\det[sI-(A-BK)] = s^2 + (0.768+4621k_2)s + (140.8+4621k_1)$$

e se por exemplo $p(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, obtém-se

$$140.8 + 4621k_1 = \omega_n^2 = 4^2 = 16$$

$$0.768 + 4621k_2 = 2\xi\omega_n = 2\frac{\sqrt{2}}{2}4 = 5.657$$

e portanto $k_1 = -0.027$ e $k_2 = 0.001$

- Alternativa: usar a rotina `acker` do Matlab. Por exemplo:

```
K=acker(A,B,roots([1 2*sqrt(2)/2 4*4]))
```

que resulta em `K = [-0.0270 0.0011]`

Desenho de polos e zeros I

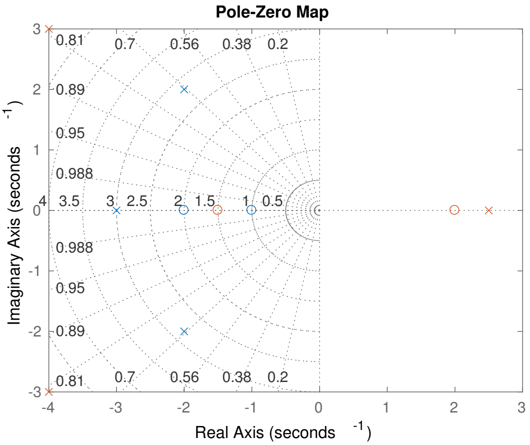
- Sejam as seguintes funções de transferência:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+2-2j)(s+2+2j)}, \quad H(s) = \frac{(s-2)(s+1.5)}{(s-2.5)(s+4-3j)(s+4+3j)}$$

Uma representação gráfica dos polos e zeros $G(s)$ e $H(s)$ pode ser obtida por meio dos seguintes comandos:

```
G=tf(poly([-2 -1]),poly([-3 -2+2j -2-2j]));
H=tf(poly([2 -1.5]),poly([2.5 -4+3j -4-3j]));
pzmap(G,H);
```

O comando `grid` também é muito útil para ilustrar o amortecimento associados aos polos complexos conjugados. A figura mostrada a seguir ilustra o resultado.



Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
0.81
0.7
0.56
0.38
0.2
0.89
0.95
0.988
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.988
0.95
0.89
0.81
0.7
0.56
0.38
0.2

Referências Bibliográficas

- P. A. V. Ferreira. Introdução aos sistemas de controle. Notas de aula do Prof. Paulo Valente, FEEC-UNICAMP, 1999, `http://www.dt.fee.unicamp.br/~jbosco/ea722/rotaula0.pdf`.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini. Feedback Control of Dynamic Systems. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 6 edition, 2009.
- J. C. Geromel and A. G. B. Palhares. Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios. Blucher, São Paulo, SP, 2004.
- K. Ogata. Engenharia de Controle Moderno. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ, 3 edition, 1998.