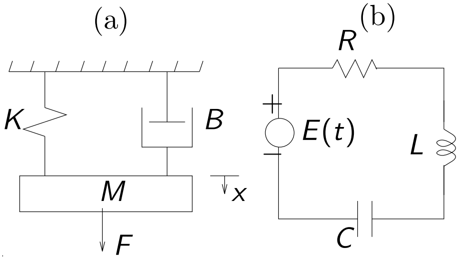
EA619 - Laboratório de Análise Linear
Simulação Analógica de Sistemas Dinâmicos

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2022

- Analisar o comportamento de um sistema dinâmico através de um sistema análogo.
- Sistemas que são descritos por equações diferenciais ou a diferenças com a mesma estrutura são considerados Análogos.



(a) Sistema Massa-Mola-Atrito: $M\frac{d^2}{dt^2}x(t) + B\frac{d}{dt}x(t) + Kx(t) = F(t)$

(b) Circuito RLC Série: $L\frac{d^2}{dt^2}q(t) + R\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$

Simuladores Analógicos

Simuladores Analógicos

- Mais antigos que os simuladores (computadores) digitais;
- No começo, pequenos sistemas mecânicos;
- Revolução com o surgimento do Amplificador Operacional.

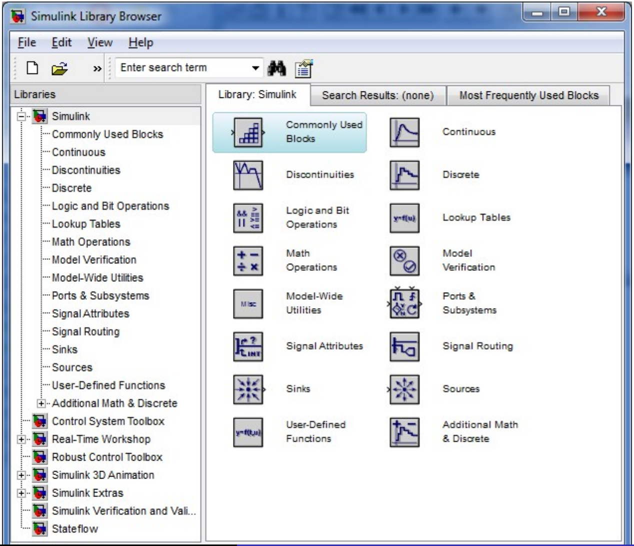
Simuladores Analógicos Eletrônicos

- Sistemas análogos aos mecânicos com
  - Dimensões físicas muito menores;
  - Conforto de manipulação;
  - Conexões flexíveis, facilmente alteráveis;
  - Cálculos realizados em paralelo.

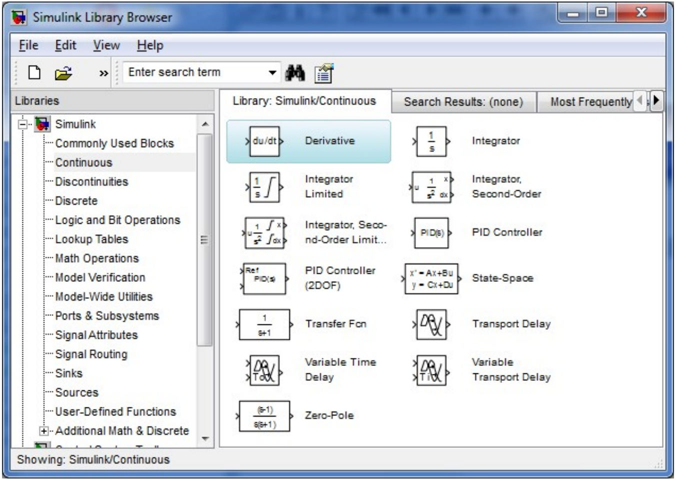
Simuladores Analógicos Digitais

- Softwares que realizam as funções de um simulador analógico;
- Preservam a filosofia da simulação analógica;
- Alguns sistemas: SIMULINK, TUTSIM, SSA (*).

- Janela Inicial

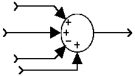


- Janela dos Elementos de Simulação à Tempo Contínuo

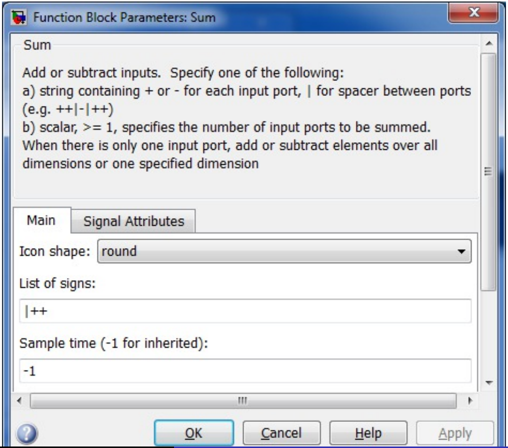


Elementos Lineares Básicos

- Somador: soma os sinais de entrada: $z(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t)$

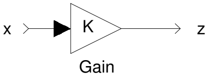


O número de entradas e os sinais (se $+$ ou $-$) é definido no menu de parâmetros

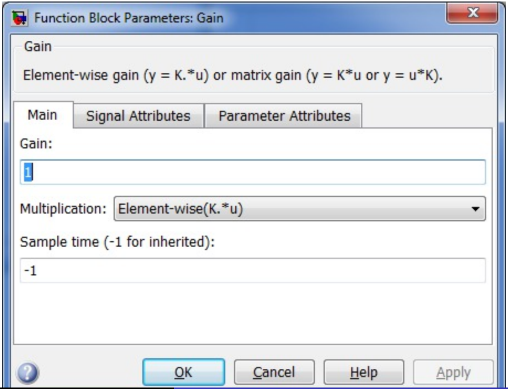


Elementos Lineares Básicos

- Ganho: Multiplica o sinal da entrada por uma constante: $z(t) = Kx(t)$

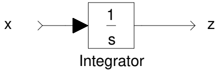


O valor do ganho (numérico ou simbólico) é definido no menu de parâmetros

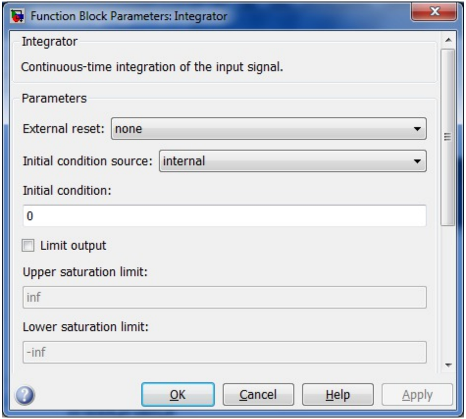


Elementos Lineares Básicos

- Integrador: Integra o sinal da entrada: $z(t) = X_0 + \int_0^t x(\tau)d\tau$

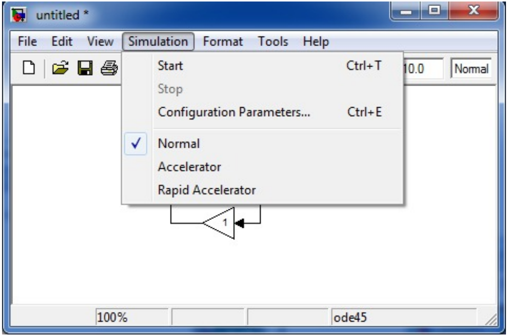


O valor da condição inicial (numérica ou simbólica) é definida no menu



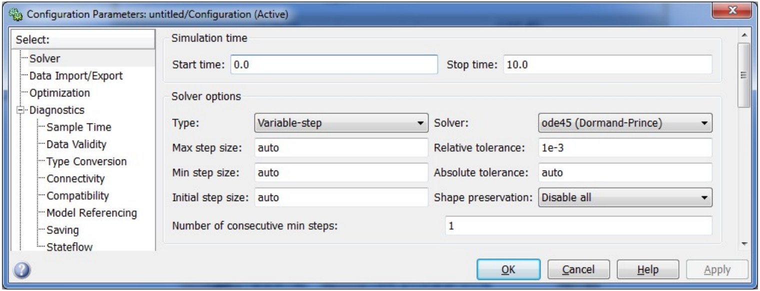
Parâmetros de Configuração

- Intervalo de Tempo e Parâmetros de Integração



Parâmetros de Configuração

- Parâmetros escolhidos no menu Simulation/Parameters:



- Simulation Time: Tempo Inicial e Final da Simulação
- Solver Options: Parâmetros de Integração

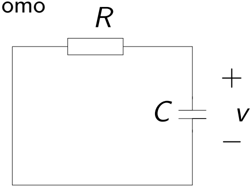
Simulação de Sistemas

- Reprodução fiel do comportamento de um sistema através de um sistema análogo.

Sistema Dinâmico

- Comportamento representado por equações diferenciais ou a diferenças, onde o tempo é uma variável independente.
- Neste Laboratório: sistemas dinâmicos modelados por equações diferenciais ordinárias.

Exemplo: Circuito RC autônomo



$$v(t), \qquad v(0) = v_0$$

- Modelo Matemático

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{-1}{RC}v(t), \qquad v(0) = v_0$$

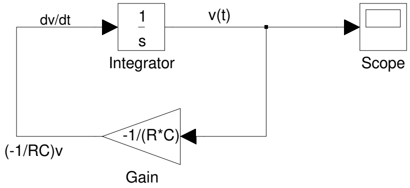
- Solução

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{d}{dt} v(\tau) d\tau \; = \; v_0 + \int_0^t \frac{-1}{RC} v(\tau) d\tau$$

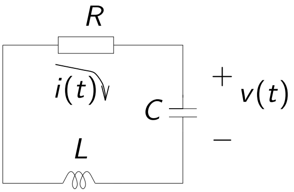
$$v(t) = v_0 + \left[\left(\frac{-1}{RC} \right) \right] \int_0^t v(\tau) d\tau$$

- Observação: $v(t)$ pode ser obtido a partir da integral do próprio $v(t)$.

- Método para Construção do Diagrama de Simulação:



Circuito RLC Autônomo



$$\begin{aligned} v(0) &= v_0 \\ i(0) &= i_0 \end{aligned}$$

- Modelo Matemático

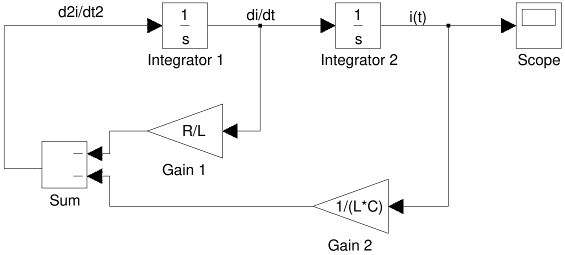
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \Rightarrow \begin{cases} i(0) = i_0 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} \triangleq Di_0 = -\dfrac{R}{L} i_0 - \dfrac{1}{L} v_0 \end{cases}$$

Reescrevendo

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\left(\frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt} - \frac{1}{LC} i$$

Circuito *RLC* Autônomo

- Diagrama de Simulação:



Condições Iniciais

- Nível de energia do sistema no instante inicial ($t = 0$);
- Somente os integradores possuem condições iniciais;
- Número de condições iniciais = Número de integradores.

Outros comandos úteis do Matlab

- comando: `whos`

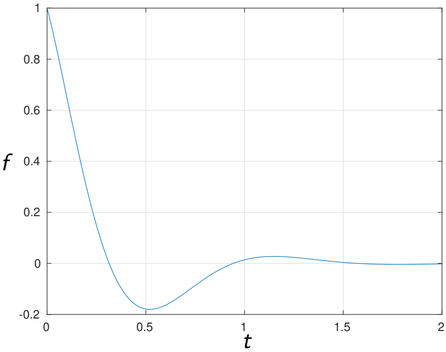
```
Name        Size              Bytes  Class     Attributes

A           4x4                 128  double
B           4x1                  32  double
beta        1x1                   8  double
nome        1x5                  10  char
omega_n     1x1                   8  double
qsi         1x1                   8  double
```

Outros comandos úteis do Matlab

- comando: `plot`

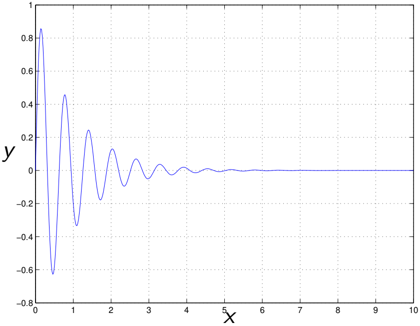
Uma ilustração gráfica da função $\exp(-3t)\cos(5t)$ pode ser feito por meio dos seguintes comandos (note que é necessário definir uma discretizaçõ do tempo):

```
t=0:0.01:2;
f=exp(-3*t).*cos(5*t);
plot(t,f)
grid;
xlabel t;
ylabel f;
```

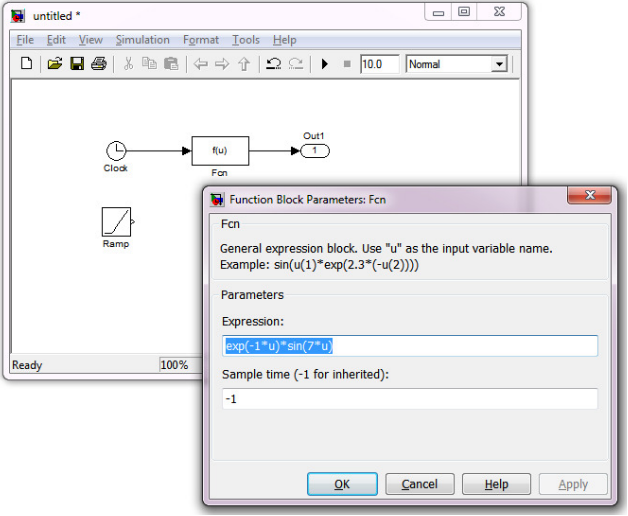


- comando: fplot e print

```
fplot('exp(-1*x)*sin(10*x)',[0 10])
print -depsc2 figura.eps
```



- bloco: `fcn`


untitled *
File Edit View Simulation Format Tools Help
10.0
Normal
Clock
f(u)
Fcn
Out1
1
Ramp
Ready
100%
Function Block Parameters: Fcn
Fcn
General expression block. Use "u" as the input variable name.
Example: sin(u(1)*exp(2.3*(-u(2))))
Parameters
Expression:
exp(-1*u)*sin(7*u)
Sample time (-1 for inherited):
-1
OK
Cancel
Help
Apply

Dominância

- Seja a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem:

$$\ddot{y} + 11\dot{y} + y = 0, \qquad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 9$$

A equação característica da equação é:

$$\lambda^2 + 11\lambda + 10 = 0, \qquad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -10$$

fornecendo a seguinte solução geral

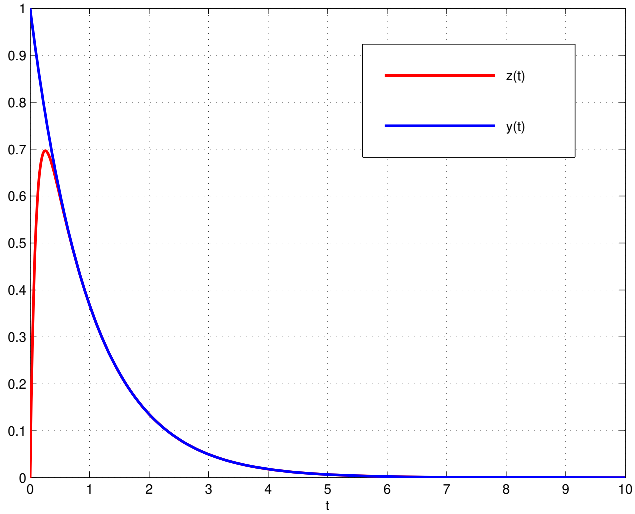
$$y(t) = a\exp(-t) + b\exp(-10t)$$

em que a e b são os coeficientes a serem determinados. Usando as condições iniciais, determina-se $a = 1$, $b = -1$, produzindo a seguinte solução

$$y(t) = \exp(-t) - \exp(-10t)$$

Considere $z(t) = \exp(-t)$. A próxima figura mostra a representação gráfica de $y(t)$ e $z(t)$

Dominância



• Uma vez realizada uma simulação do simulink, automaticamente são criadas duas variáveis no ambiente do matlab (linha de comando): `tout` e `yout`. A primeira é um vetor contendo os instantes de tempo em que a simulação foi realizada. A segunda é uma matriz contendo em suas colunas os valores das variáveis associadas a blocos do tipo out que foram introduzidos no diagrama de simulação.

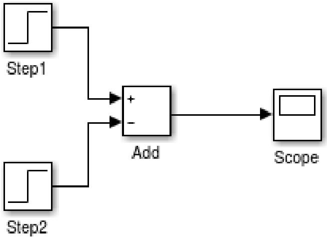
• Uma maneira simples de plotar os resultados é por meio do comando `plot(tout,yout)`.

• Observação: nos Matlab mais novos, basta usar `plot(yout)`.

Impulso Aproximado

• Uma maneira de construir um impulso de forma aproximada é por meio de um pulso de pequena duração e altura proporcional tal que a área do pulso seja unitária.

• O pulso pode ser construído de acordo com a figura mostrada a seguir. No degrau `step1` são ajustados `Step Time` igual a zero e `Final Value` igual a 100, por exemplo. No degrau `step1` ajusta-se `Step Time` igual a 0.01 e `Final Value` igual a 100. Como Consequência, a subtração dos dois sinais produz um impulso de duração 0.01 e altura 100.



Referências Bibliográficas

- Linearidade em Sinais e Sistemas, I. S. Bonatti, A. Lopes, P. L. D. Peres & C. M. Agulhari, Capítulo 14 e Capítulo 15.
- Engenharia de Sistemas de Controle, Norman S. **Nise**, LTC - Livros Técnicos e Científicos. Capítulo 4 (Resposta no domínio do tempo)
- Engenharia de Controle Moderno, K. **Ogata**, Prentice-Hall do Brasil. Capítulo 2 (Transformada de Laplace) e Capítulo 3 (Modelagem matemática de sistemas dinâmicos)
- Feedback Control of Dynamic Systems, G. F. **Franklin**, J. D. **Powell** and A. **Emami-Naeini**, Prentice Hall. Capítulo 2 (Dynamic models) e Capítulo 3 (Dynamic Response).