EA616- Análise Linear de Sistemas
Resolução de Equações de Estado

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2018

Solução da equação homogênea I

Considere a equação de estado

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Equações homogêneas com estrutura triangular podem ser resolvidas de forma recorrente, componente a componente.

Exemplo 1.1 (Sistema de segunda ordem em cascata)

Considere a equação diferencial

$$D(p) = p(p+1)y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \ , \ \dot{y}(0) = 1$$

A escolha das variáveis de estado $v_1 = y$, $v_2 = \dot{y}$ produz a representação de estado na forma matricial

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solução da equação homogênea II

Note que trata-se de um sistema triangular, isto é, um sistema em cascata

$$\dot{v}_1 = v_2 \ , \ \dot{v}_2 = -v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1(0) = 0 \ , \ v_2(0) = 1$$

cuja solução é dada por

$$v_2(t) = \exp(-t) \quad , \quad pv_1 = \exp(-t) \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = -\exp(-t) + a = 1 - \exp(-t)$$

Definição 1 (Equação Característica da matriz A)

A equação polinomial de grau n

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

é denominada equação característica associada à matriz A. Qualquer λ raiz da equação característica é autovalor da matriz A, e portanto satisfaz

$$Av = \lambda v \ , \ v \neq 0$$

sendo $v \in \mathbb{C}^n$ um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ.

Aplicando a transformada unilateral de Laplace à equação homogênea (1), tem-se (a transformada de uma matriz é a transformada de cada um dos seus elementos)

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$$

Aplicando a transformada unilateral de Laplace à equação homogênea (1), tem-se (a transformada de uma matriz é a transformada de cada um dos seus elementos)

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{\dot{v}\} = s\mathscr{L}\{v\} - v_0 = A\mathscr{L}\{v\}$$

e, portanto,

$$V(s) = \mathscr{L}\{v\} = (s\mathrm{I} - A)^{-1} v_0 \in \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad v(t) = \mathscr{L}^{-1}\{V(s)\}$$

Exemplo I

Exemplo 1.2

Considere novamente o sistema do Exemplo 1.1

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$(s\mathrm{I} - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}$$

A inversa de uma matriz é igual à matriz adjunta (transposta da cofatora) dividida pelo determinante.

Exemplo 1.2

Considere novamente o sistema do Exemplo 1.1

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$(s\mathrm{I} - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}$$

A inversa de uma matriz é igual à matriz adjunta (transposta da cofatora) dividida pelo determinante.

$$\det(s\mathrm{I} - A) = s(s+1) \quad , \quad \mathrm{Adj}(s\mathrm{I} - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Exemplo II

$$(s\mathrm{I}-A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\{(s\mathrm{I}-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathrm{I}-A)^{-1}\} v_0 = \begin{bmatrix} 1-\exp(-t) \\ \exp(-t) \end{bmatrix} u(t)$$

Considere a equação homogênea

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

Supondo que a solução $v(t)$ possa ser escrita em série de potências, tem-se

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k t^k \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \sum_{k=0}^{+\infty} k v_k t^{k-1} \quad , \quad v_0 = v_0$$

sendo $v_k \in \mathbb{R}^n$ os vetores da expansão em série (a determinar).

Substituindo na equação e igualando os termos da série de potência, tem-se

$$v_1 = Av_0 \ , \ 2v_2 = Av_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{2}A^2 v_0 \ , \ 3v_3 = Av_2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \frac{1}{3!}A^3 v_0$$

$$k v_k = A v_{k-1} \quad \Rightarrow \quad v_k = \frac{1}{k!}A^k v_0$$

e portanto

$$v(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) v_0$$

sendo $A^0 = \mathrm{I}$ (por construção).

Como a série de Taylor[1] da função $\exp(\lambda t)$ é dada por

$$\exp(\lambda t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k$$

define-se (por analogia)

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Portanto, a solução da equação homogênea (1) é dada por

$$v(t) = \exp(At) v_0 \tag{2}$$

[1] Brook Taylor, matemático inglês (1685–1731).

Propriedade 1

$$\exp(At)u(t) = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

pois a solução $v(t)$, para $t \geq 0$, é dada por

$$v(t) = \exp(At)v_0 = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}v_0$$

para qualquer v_0.

Propriedade 2 (Derivada de $\exp(At)$)

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) = \exp(At)A$$

pois

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}t^k\right) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}kt^{k-1}\right) = A\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}t^k\right)$$

Propriedade 3

$$\exp\left(A(t_1+t_2)\right) = \exp(At_1)\exp(At_2) = \exp(At_2)\exp(At_1)$$

pois, por um lado

$$\exp\left(A(t_1+t_2)\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!}(t_1+t_2)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!} \sum_{r=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ r \end{array} \right) t_1^r t_2^{m-r}$$

e, por outro lado,

$$\exp(At_1)\exp(At_2) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A^r}{r!} t_1^r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t_2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} A^{k+r} \frac{t_1^r}{r!} \frac{t_2^k}{k!}$$

Agrupando os termos cujos expoentes somam $k+r=m$, com $m=0,1,\ldots,\infty$ tem-se

$$\exp(At_1)\exp(At_2) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{m}\frac{A^m}{m!}\frac{t_1^r}{r!}\frac{t_2^{m-r}}{(m-r)!}m!$$

e, portanto,

$$\exp(At_1)\exp(At_2) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{A^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ r \end{array}\right)t_1^r t_2^{m-r}$$

Propriedade I

Propriedade 4

A matriz $\exp(At)$ *é não singular para qualquer matriz* A *e para todo* t*, com inversa dada por*

$$(\exp(At))^{-1} = \exp(-At)$$

pois, fazendo-se $t_1 = t$ *e* $t_2 = -t$*, pela Propriedade 3 tem-se*

$$\exp(At)\exp(-At) = \exp(A0) = I$$

Propriedade 5

$$\exp(At)\exp(Bt) = \exp(Bt)\exp(At) = \exp\left((A+B)t\right) \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA$$

pois

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 =$$
$$= A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + 2BA + B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad AB = BA$$

A expansão binomial de Newton[a] *aplica-se a matrizes apenas quando o produto das matrizes comuta, o que normalmente não ocorre.*

$AB = BA$, *por exemplo, quando* $B = \exp(At)$ *ou quando* A *e* B *são diagonais.*

[a] Sir Isaac Newton, inglês (1643–1727).

Propriedade 6

Toda matriz A satisfaz sua equação característica, isto é,

$$\det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(A) = 0$$

Prova:
Considere a matriz $\mathrm{Adj}(\lambda \mathrm{I} - A)$ (matriz adjunta formada pelos determinantes obtidos ao retirar-se de $(\lambda \mathrm{I} - A)$ uma linha e uma coluna), com elementos cuja maior potência em λ é λ^{n-1}. Assim, pode-se escrever

$$\mathrm{Adj}(\lambda \mathrm{I} - A) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

sendo B_i, $i = 0, \ldots, n-1$ matrizes $(n \times n)$ constantes (isto é, independentes de λ) a determinar. Usando a identidade

$$(\lambda \mathrm{I} - A)\mathrm{Adj}(\lambda \mathrm{I} - A) = \det(\lambda \mathrm{I} - A)\mathrm{I}$$

e substituindo o lado esquerdo, tem-se

Cayley-Hamilton II

$$(\lambda \mathsf{I} - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0) = \det(\lambda \mathsf{I} - A)\mathsf{I}$$

$$B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} + (B_{n-3} - AB_{n-2})\lambda^{n-2} + \cdots + (B_0 - AB_1)\lambda - AB_0 = \det(\lambda \mathsf{I} - A)\mathsf{I}$$

Usando a equação característica do lado direito, tem-se

$$B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} + (B_{n-3} - AB_{n-2})\lambda^{n-2} + \cdots + (B_0 - AB_1)\lambda - AB_0 =$$

$$= \lambda^n \mathsf{I} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}\mathsf{I} + \cdots + \alpha_1\lambda \mathsf{I} + \alpha_0 \mathsf{I}$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em λ

Cayley-Hamilton III

$$
\begin{aligned}
B_{n-1} &= \mathsf{I} \\
B_{n-2} - AB_{n-1} &= \alpha_{n-1}\mathsf{I} \\
B_{n-3} - AB_{n-2} &= \alpha_{n-2}\mathsf{I} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
B_0 - AB_1 &= \alpha_1\mathsf{I} \\
-AB_0 &= \alpha_0\mathsf{I}
\end{aligned}
$$

Multiplicando a primeira equação por A^n, a segunda por A^{n-1}, e assim por diante, e somando, do lado direito tem-se $\Delta(A)$. Assim,

$$
(A^n B_{n-1} - A^n B_{n-1}) + (A^{n-1} B_{n-2} - A^{n-1} B_{n-2}) + (A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-2} B_{n-3}) + \cdots
$$
$$
+ (A^2 B_1 - A^2 B_1) + (AB_0 - AB_0) = 0
$$

Como conclusão, $\Delta(A) = 0$.

Exemplo

Exemplo 1.3

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda(\lambda + 1)$$

Computando o polinômio (matricial)

$$\Delta(A) = A(A + \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

observa-se que a matriz A satisfaz sua equação característica.

Exemplo

Exemplo 1.4

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2.5\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{-1} = 2.5 - \lambda$$

A matriz B dada por

$$B = 2.5\mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é igual à inversa de A, o que é uma conseqüência de $\Delta(A) = 0$.

Briot-Ruffini I

Nota: para polinômios $x(t)$ e $y(t) \neq 0$, tem-se

$$\frac{x(t)}{y(t)} = q(t) + \frac{r(t)}{y(t)} \Rightarrow x(t) = q(t)y(t) + r(t)$$

Propriedade 7 (Briot-Ruffini)

Se λ é raiz da equação característica $\Delta(\lambda) = 0$, então

$$\exp(\lambda t) = r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t)\lambda^k \tag{3}$$

pois, para um polinômio $\Delta(\lambda)$ de grau n, tem-se

$$\exp(\lambda t) = q(\lambda, t)\Delta(\lambda) + r(\lambda, t)$$

com $r(\lambda, t)$ (polinômio resto) dado por

$$r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t)\lambda^k$$

Briot-Ruffini II

Note que $\exp(\lambda t)$ é polinomial, podendo ser obtida pela expansão em série de Taylor.

Além disso, para λ raiz da equação característica $\Delta(\lambda) = 0$, tem-se

$$\exp(\lambda t) = r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t)\lambda^k$$

As funções $\rho_k(t)$ podem ser obtidas pela resolução de um sistema linear de equações resultante da aplicação da equação (3) nas raízes distintas de $\Delta(\lambda) = 0$ e, no caso de raízes com multiplicidade maior do que 1, utilizando-se também as derivadas (em relação a λ) da equação.

Propriedade 8 (Função de matriz quadrada)

Seja $f(\lambda)$ uma função polinomial e $\Delta(\lambda)$ um polinômio de grau n em λ. Então,

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \lambda^k$$

Para λ autovalor de A, $\Delta(\lambda) = 0$ e, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$\Delta(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k$$

Note que, para matrizes bloco-diagonais com submatrizes quadradas,

$$A = diag(A_1, \ldots, A_\ell) \quad \Rightarrow \quad f(A) = diag(f(A_1), \ldots, f(A_\ell))$$

Exemplo 1.5

A função A^{10}, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

pode ser computada pela Propriedade 8 a partir do Teorema de Cayley-Hamilton.

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{10} = \rho_0 + \rho_1 \lambda \ , \ 10\lambda^9 = \rho_1$$

$$\rho_0 = -9 \ , \ \rho_1 = 10 \quad \Rightarrow \quad A^{10} = -9\mathrm{I} + 10A = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade 9

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *e sua equação característica* $\Delta(A) = 0$. *Então*

$$\exp(At) = q(A,t)\Delta(A) + r(A,t) = r(A,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t)A^k$$

pois, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $\Delta(A) = 0$.

Exemplo 1.6

Considere novamente o sistema do Exemplo 1.1

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando a Propriedade 7 (Briot-Ruffini), tem-se

$$\exp(\lambda t) = \rho_0(t) + \rho_1(t)\lambda$$

para $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ (autovalores de A), resultando em

$$\exp(0t) = 1 = \rho_0(t) + \rho_1(t)0 \text{ , } \exp(-t) = \rho_0(t) - \rho_1(t) \;\Rightarrow\; \rho_0(t) = 1 \text{ , } \rho_1(t) = 1 - \exp(-t)$$

Do Teorema de Cayley-Hamilton e da Propriedade 9, obtém-se

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \exp(-t)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix}$$

Impondo a condição inicial, tem-se

$$v(t) = \exp(At)v(0) = \begin{bmatrix} 1 - \exp(-t) \\ \exp(-t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.7

Considere novamente o sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = -3 \; , \; \lambda_2 = 3 \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes do polinômio $r(\lambda, t)$ são obtidos das condições

$$\exp(-3t) = \rho_0(t) - 3\rho_1(t) \quad , \quad \exp(3t) = \rho_0(t) + 3\rho_1(t)$$

resultando em

$$\rho_0(t) = \frac{1}{2}(\exp(3t) + \exp(-3t)) \; , \; \rho_1(t) = \frac{1}{6}(\exp(3t) - \exp(-3t))$$

Portanto,

$$v(t) = \exp(At)v(0) = \big(\rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A\big)v(0)$$

Exemplo II

$$v(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \exp(3t) + 2\exp(-3t) & 2\exp(3t) - 2\exp(-3t) \\ \exp(3t) - \exp(-3t) & 2\exp(3t) + \exp(-3t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \exp(3t) + 2\exp(-3t) \\ \exp(3t) - \exp(-3t) \end{bmatrix}$$

Para uma discussão sobre aspectos numéricos do cálculo de $\exp(At)$, recomenda-se

- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. SIAM Review, 20(4):801–836, October 1978.
- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. SIAM Review, 45(1):3–49, March 2003.

Similaridade

Considere a equação de estado

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

Definindo a mudança de variáveis (T não singular)

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad T\dot{\hat{v}} = AT\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} \quad ; \quad \hat{A} = T^{-1}AT \ , \ A = T\hat{A}T^{-1}$$

Propriedade 10 (Similaridade e autovalores)

Transformações de similaridade preservam os autovalores, pois

$$\det(\hat{A} - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) = \det(A - \lambda I)$$

Escolhas apropriadas da transformação T podem levar a representações $\hat{A}$ diagonal ou triangular, dependendo da estrutura de autovalores e autovetores da matriz A.

Propriedade 11 (Função de matriz similar)

$$A = T\hat{A}T^{-1} \quad \Rightarrow \quad f(A) = Tf(\hat{A})T^{-1}$$

pois, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \underbrace{(T\hat{A}T^{-1})\cdots(T\hat{A}T^{-1})}_{k \text{ vezes}} = T\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \hat{A}^k T^{-1} = Tf(\hat{A})T^{-1}$$

Propriedade 12 (Exponencial de transformação de similaridade)

Para qualquer matriz quadrada T não singular, tem-se

$$A = T\hat{A}T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = T\exp(\hat{A}t)T^{-1}$$

Prova: a mudança de variáveis $v = T\hat{v}$ aplicada ao sistema $\dot{v} = Av$, resulta em

$$\dot{v} = T\dot{\hat{v}} = AT\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} \;\; ; \quad \hat{A} = T^{-1}AT$$

$$v(t) = \exp(At)v(0) = T\hat{v} = T\exp(\hat{A}t)T^{-1}v(0) \quad , \quad \forall v(0)$$

Note que esta propriedade é um caso particular da Propriedade 11 para $f(A) = \exp(At)$.

Propriedade 13 (Exponencial de matriz diagonal)

Para uma matriz $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *(diagonal), tem-se*

$$\exp(\Lambda t) = diag(\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_n t))$$

pois

$$\dot{v} = \Lambda v \quad \Rightarrow \quad v_k(t) = \exp(\lambda_k t) v_k(0)$$

e

$$v(t) = diag(\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_n t)) v(0)$$

Como a solução de $\dot{v} = \Lambda v$ *é dada por*

$$v(t) = \exp(\Lambda t) v(0)$$

tem-se

$$v(t) = \exp(\Lambda t) v(0) = diag(\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_n t)) v(0) \quad , \quad \forall v(0)$$

Propriedade 14 (Matrizes diagonalizáveis)

Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possui n autovetores linearmente independentes, a transformação Q construída com os autovetores (colunas) resulta em

$$AQ = Q\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = Q^{-1}AQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

sendo λ_i, $i = 1, \ldots, n$ os autovalores de A, pois

$$A\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que os autovalores não precisam ser distintos.

Autovalores distintos

Propriedade 15 (Autovalores distintos)

Os autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz A *são linearmente independentes. Portanto, a matriz* Q *composta dos autovetores diagonaliza a matriz pela transformação de similaridade* $Q^{-1}AQ$.

Exemplo 1.8 (Autovalores distintos)

Considere novamente a equação de estado homogênea do Exemplo **??**

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} v \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz A são obtidos da solução da equação característica

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3 \, , \, \lambda_2 = 3$$

e os autovetores podem ser determinados pela equação

$$(A - (-3)\mathrm{I})q_1 = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3\mathrm{I})q_2 = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo II

Observe que os autovetores definem uma direção no espaço (e não um comprimento nem um sentido) e são linearmente independentes.

A transformação de similaridade resulta em uma matriz diagonal

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz A é diagonalizável, com a transformação $v = Q\hat{v}$ dada por

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} \quad , \quad \hat{v}(0) = Q^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que a representação na variável $\hat{v}$ é um sistema desacoplado com duas equações de primeira ordem. Resolvendo, tem-se

Exemplo III

$$\hat{v}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-3t) \\ \exp(3t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \hat{v} = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) + \exp(3t) \\ -\exp(-3t) + \exp(3t) \end{bmatrix}$$

O mesmo resultado poderia ser obtido a partir da equação diferencial de segunda ordem em v_1 (ou em v_2)

$$(p^2 - 9)v_1 = 0 \quad ; \quad v_1(0) = 3 \; , \; \dot{v}_1(0) = -3$$

Exemplo 1.9 (Autovalores complexo-conjugados)

Considere o sistema na forma companheira

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} v, \ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja equação característa é $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, com autovalores $\lambda_1 = 1 + j$, $\lambda_2 = 1 - j$.

Como os autovalores são distintos, os autovetores associados são linearmente independentes e, portanto, a forma de Jordan é diagonal. De fato,

$$(A - (1+j)\mathrm{I})q_1 = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} -1-j & 1 \\ -2 & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+j \end{bmatrix}$$

$$(A - (1-j)\mathrm{I})q_2 = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} -1+j & 1 \\ -2 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-j \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+j & -j \\ 1-j & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+j & 1-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}$$

Neste caso, tanto a forma de Jordan diagonal quanto os autovetores são complexos (os autovalores e os correspondentes autovetores formam pares complexo-conjugados). Uma alternativa à forma diagonal, que também explicita os autovalores, é dada por exemplo pela transformação de similaridade

$$S = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(q_1) & \mathrm{Im}(q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\bar{A}$ apresenta na diagonal principal a parte real dos autovalores e, na outra diagonal, a parte imaginária, e é chamada de forma modal.

Para obter a solução, tem-se

$$\exp(\bar{A}t) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A$$

$$\exp((1+j)t) = \rho_0 + \rho_1(1+j), \quad \exp((1-j)t) = \rho_0 + \rho_1(1-j)$$

Subtraindo e somando as duas equações acima

$$2j\rho_1 = \exp((1+j)t) - \exp((1-j)t), \quad 2(\rho_0+\rho_1) = \exp((1+j)t) + \exp((1-j)t)$$

obtém-se

$$\rho_1 = \exp(t)\mathrm{sen}(t), \quad \rho_0 = \exp(t)(\cos(t) - \mathrm{sen}(t))$$

$$\exp(\bar{A}t) = \begin{bmatrix} \rho_0+\rho_1 & -\rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0+\rho_1 \end{bmatrix} = \exp(t)\begin{bmatrix} \cos(t) & -\mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}(0) = S^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}(t) = \exp(\bar{A}t)\bar{v}(0) = \exp(t)\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$v(t) = S\bar{v}(t) = \exp(t)\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}$$

Propriedade 16 (Forma modal)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

são similares, pois

$$\det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix}\right) = \det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

está na forma modal.

Exemplo 1.10

Os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são $1 \pm j$, $2 \pm 2j$ e 3, pois os autovalores de uma matriz diagonal por blocos são os autovalores de cada bloco.

Note que a forma modal (bloco diagonal) é uma alternativa nas transformações de similaridade que não requer a manipulação de números complexos.

Multiplicidade geométrica

Definição 2 (Multiplicidade geométrica)

A multiplicidade geométrica do autovalor λ é igual ao número de autovetores linearmente independentes associados a λ, isto é, é igual à dimensão do espaço nulo de $A - \lambda I$.

Exemplo 1.11 (Autovalores iguais e autovetores linearmente independentes)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$. Note que nas matrizes triangulares, isto é, todos os elementos abaixo (ou acima) da diagonal principal são nulos, os autovalores são os elementos da diagonal principal.

Para o autovalor igual a -1, tem-se a equação que define os autovetores

$$\big(A - (-1)\mathrm{I}\big)q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0$$

Note que $\mathrm{null}(A + \mathrm{I}) = 2$. Por exemplo, os autovetores associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ são

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O autovetor associado a $\lambda_3 = 3$ é dado por

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Observe que a Propriedade 15 apresenta uma condição suficiente para a existência de autovetores linearmente independentes. Neste exemplo, o autovalor -1 possui multiplicidade algébrica igual a dois e foi possível determinar dois autovetores linearmente independentes associados. Portanto, a multiplicidade geométrica do autovalor também é igual a dois.

Note que a multiplicidade geométrica do autovalor -1 é definida pela dimensão do espaço nulo de $A-(-1)\mathrm{I}$, neste exemplo igual a dois.

Exemplo III

Portanto, por construção,

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

O sistema $\dot{v} = Av$, $v(0)$ tem como solução

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp(At)v(0) = Q\exp(\hat{A}t)Q^{-1}v(0) \\ &= \begin{bmatrix} \exp(-t) & 0 & -0.25\exp(-t) + 0.25\exp(3t) \\ 0 & \exp(-t) & -0.5\exp(-t) + 0.5\exp(3t) \\ 0 & 0 & \exp(3t) \end{bmatrix} v(0) \end{aligned}$$

Exemplo – Sistema de segunda ordem não diagonalizável

Exemplo 1.12 (Sistema de segunda ordem não diagonalizável)

Considere a matriz A e seus autovalores

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

A matriz A tem apenas um autovetor associado ao autovalor -1, dado por

$$(A - (-1)\mathrm{I})v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\beta \quad , \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o autovalor -1 tem multiplicidade algébrica igual a dois (pois é raiz dupla) e multiplicidade geométrica unitária.

Assim, a matriz A não é diagonalizável, porém é possível encontrar uma transformação que leva a matriz a uma forma triangular quase diagonal $\hat{A}$.

Definição 3 (Bloco de Jordan de ordem k)

Um bloco de Jordan de ordem k é uma matriz quadrada (triangular superior) de dimensão k, denotada J_k, com seu único autovalor de multiplicidade k na diagonal, uns na primeira subdiagonal superior e zeros nas demais.
Por exemplo,

$$J_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} , \; J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} , \; J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} , \; J_4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ou apenas J_1, J_2, J_3 e J_4.

Exemplo 1.13 (Cálculo de $\exp(J_2 t)$)

Considere o bloco de Jordan de segunda ordem

$$J_2 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \sigma$$

$$\exp(\lambda t) = \rho_0(t) + \lambda \rho_1(t) \quad \Rightarrow \quad \exp(\sigma t) = \rho_0(t) + \sigma \rho_1(t)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \exp(\lambda t)\Big|_{\lambda=\sigma} = t \exp(\sigma t) = \rho_1(t) \quad \Rightarrow \quad \rho_0(t) = \exp(\sigma t)(1 - \sigma t)$$

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Cálculo de $\exp(J_4 t)$

Exemplo 1.14 (Cálculo de $\exp(J_4 t)$)

Considere o bloco de Jordan de quarta ordem

$$J_4 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Note que o polinômio característico é dado por $\Delta(\lambda) = (\lambda - \sigma)^4$ e que σ também é raiz das derivadas (até a terceira ordem) de $\Delta(\lambda)$. Portanto,

$$r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{3} \xi_k(t)(\lambda - \sigma)^k, \qquad \text{que resulta em}$$

$$\xi_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \exp(\lambda t)\Big|_{\lambda=\sigma} = \frac{t^k}{k!} \exp(\sigma t)$$

$$\exp(At) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Função de bloco de Jordan I

Propriedade 17 (Função de bloco de Jordan)

Considere um bloco de Jordan de ordem k e uma função $f(\lambda)$ diferenciável $k-1$ vezes. Então,

$$f(J_k) = \left. \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \ddot{f}(\lambda)/2! & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix} \right|_{\lambda=\sigma}$$

sendo σ o autovalor do bloco de Jordan.

Prova:
Pela Propriedade 7 (Briot-Ruffini)

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (\lambda - \sigma)^i \quad \Rightarrow \quad \xi_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} f(\lambda)\Big|_{\lambda=\sigma}$$

Propriedade 18 (Bloco de Jordan na forma modal)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad , \quad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + j\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

são similares, pois os autovalores de uma matriz bloco triangular são os autovalores dos blocos da diagonal.

Note que a forma modal de Jordan é uma alternativa que não requer a manipulação de números complexos.

Exemplo 1.15

Considere a matriz A na forma modal de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\exp(At) = \exp(t) \begin{bmatrix} \cos(t) & -\mathrm{sen}(t) & t\cos(t) & -t\mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) & \cos(t) & t\mathrm{sen}(t) & t\cos(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\mathrm{sen}(t) \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

Propriedade

Propriedade 19

Considere a matriz de dimensão k dada por

$$M = (J_k - \lambda I)$$

com λ autovalor de J_k. Então

- *O* rank *da matriz M é $k-1$, implicando que a dimensão do espaço nulo de M é 1 e, portanto, o autovalor λ tem multiplicidade geométrica igual a um e apenas um autovetor associado.*
- *O* rank *da matriz M^i é $k-i$, $i = 0, \ldots, k$. Portanto, a dimensão do espaço nulo de M^i aumenta com i até $i = k$, com $M^k = 0$.*

Propriedade 20 (Forma de Jordan)

Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser colocada na forma de Jordan por meio de uma transformação de similaridade.

Se A possuir n autovetores linearmente independentes, a forma de Jordan é diagonal e a matriz de transformação Q é composta pelos autovetores.

Se A possui $r < n$ autovetores linearmente independentes, sua forma de Jordan é diagonal por blocos com r blocos de Jordan.

Em outras palavras, para A qualquer, existe Q não singular tal que

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \text{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_r})$$

com os blocos J_{k_i}, $i = 1, \ldots, r$ na forma de Jordan (não necessariamente diagonais).

Forma de Jordan II

A forma de Jordan de uma matriz A é única (a menos de permutações dos blocos).

Por simplicidade, considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com um autovalor λ de multiplicidade algébrica igual a n. O procedimento para a obtenção da forma de Jordan segue os seguintes passos.

- Compute
$$M = (A - \lambda \mathrm{I})$$
e a dimensão r do espaço nulo de M. O número de blocos de Jordan é igual a r e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n. Note que r é a multiplicidade geométrica de λ, ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ.
- A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que
$$M^k = 0$$
- O número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k$ é igual a
$$\mathrm{rank}(M^{i-1}) - 2\mathrm{rank}(M^i) + \mathrm{rank}(M^{i+1})$$

Exemplo 1.16 (Forma de Jordan diag(J_3, J_1))

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 4)^4$$

Computando M^i, tem-se

$$M = (A - 4\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} , \ \mathrm{rank}(M) = 2 \quad ,$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{rank}(M^2) = 1 \quad , \quad M^3 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan diag(J_3, J_1) II

Portanto, a forma de Jordan possui 2 blocos (pois a dimensão do espaço nulo de M é dois) e o maior bloco tem dimensão 3 (pois $M^3 = 0$ e $M^2 \neq 0$). Como conseqüência, o outro bloco é de tamanho 1. A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.17 (Forma de Jordan diag(J_2, J_1, J_1))

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 4)^4$$

Computando M^i, tem-se

$$M = (A - 4\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} , \ \mathrm{rank}(M) = 1 \quad , \quad M^2 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan diag(J_2, J_1, J_1) II

Portanto, a forma de Jordan possui 3 blocos (pois a dimensão do espaço nulo de M é três) sendo um de tamanho dois e dois de tamanho um. De fato, $M^2 = 0$ comprova que o maior bloco é de dimensão 2. A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.18 (Forma de Jordan diag(J_2, J_2))

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^4$$

Computando M^i, tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; , \; \text{rank}(M) = 2 \quad , \quad M^2 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan diag(J_2, J_2) II

Portanto, a forma de Jordan possui 2 blocos (pois a dimensão do espaço nulo de M é dois) sendo o maior de tamanho dois e, como conseqüência, o outro também tem tamanho dois. A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.19 (Forma de Jordan diag(J_4))

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 32 & -24 & 8 \end{bmatrix} \ , \ \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 2)^4$$

Computando M^i, tem-se

$$M = (A - 4\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -16 & 32 & -24 & 6 \end{bmatrix} , \mathrm{rank}(M) = 3 \ , \ M^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -16 & 32 & -20 & 4 \\ -64 & 112 & -64 & 12 \end{bmatrix} ,$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ -16 & 24 & -12 & 2 \\ -32 & 48 & -24 & 4 \\ -64 & 96 & -48 & 8 \end{bmatrix} \ , \ \mathrm{rank}(M^3) = 1 \ , \ M^4 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan diag(J_4) II

A forma de Jordan, obtida no cálculo de M, pois o espaço nulo tem dimensão um, é dada por

$$\hat{A} = J_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedade 21 (Forma de Jordan — procedimento para autovalores distintos)

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O procedimento para a obtenção da forma de Jordan, baseado na dimensão dos espaços nulos de $M_\lambda = A - \lambda I$, denotado por

$$\nu(M_\lambda) = n - rank(M_\lambda)$$

segue os seguintes passos.

- Para cada autovalor λ com multiplicidade algébrica n_λ, compute

$$M_\lambda = (A - \lambda \mathrm{I})$$

e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ. O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ. Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ, ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ, $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

Forma de Jordan — procedimento para autovalores distintos II

- A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que

$$\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$$

que é denominado k_λ. Note que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para $\forall k \geq k_\lambda$.

- O número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$, é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes M_λ^i. Assim, o número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$ pode ser determinado por

$$2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$$

- A forma de Jordan $\hat{A}$ é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

Exemplo 1.20

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 2)^3 (\lambda - 1)$$

Para $\lambda = 2$ (que tem multiplicidade algébrica 3), tem-se

$$M_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \nu(M_2) = 4 - 3 = 1$$

Computando M_2^i, tem-se

$$M_2^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -8 & 20 & -14 & 3 \\ -24 & 52 & -34 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \nu(M_2^2) = 4-2 = 2 \quad ,$$

$$M_2^3 = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \nu(M_2^3) = 4-1 = 3$$

Note que 3 é o maior valor possível para a dimensão do espaço nulo de M_2^i, isto é, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é no máximo igual à multiplicidade algébrica. De fato, $\nu(M_2^k) = 3$, $\forall k \geq 3$.

Como o valor de dimensão de espaço nulo igual a 3 foi atingido para $i = 3$, tem-se que há apenas um bloco de Jordan associado ao autovalor $\lambda = 2$. De fato,

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\nu(M_2) - \nu(M_2^0) - \nu(M_2^2) = 2-0-2 = 0$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\nu(M_2^2) - \nu(M_2^1) - \nu(M_2^3) = 4 - 1 - 3 = 0$$
$$i = 3 \quad \Rightarrow \quad 2\nu(M_2^3) - \nu(M_2^2) - \nu(M_2^4) = 6 - 2 - 3 = 1$$

ou seja, não há blocos de tamanhos 1 e 2 associados ao autovalor $\lambda = 2$.

Note que na expressão envolvendo os *ranks* deveria ser feita uma correção na fórmula devido à presença de autovalores distintos.

Calculando M_1, tem-se

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \nu(M_1) = 4 - 3 = 1$$

e portanto há apenas um bloco de Jordan (de tamanho 1) associado ao autovalor $\lambda = 1$. De fato,

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & 20 & -17 & 5 \\ -40 & 92 & -70 & 18 \end{bmatrix} \quad , \quad \nu(M_1^2) = 4 - 3 = 1$$

Exemplo IV

A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \mathrm{diag}(J_3(2), J_1(1)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade 22 (Transformação de similaridade para a forma de Jordan)

A transformação de similaridade Q (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações

$$AQ = Q diag(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_r})$$

Cadeia de autovetores generalizados I

Definição 4 (Cadeia de autovetores generalizados)

A transformação de similaridade que leva à forma de Jordan é composta, para cada bloco de Jordan de ordem k, de uma cadeia de k vetores linearmente independentes, sendo o primeiro um autovetor e os demais autovetores generalizados.

Por exemplo, para o primeiro bloco (tamanho $k = 4$, autovalor λ), tem-se

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} J_4 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$Av_1 = \lambda v_1 \ , \ Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \ , \ Av_3 = v_2 + \lambda v_3 \ , \ Av_4 = v_3 + \lambda v_4$$

com v_1 autovetor (ou autovetor generalizado de ordem 1). A cadeia de 4 autovetores generalizados é dada por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, sendo v_2 um autovetor generalizado de ordem 2, v_3 um autovetor generalizado de ordem 3 e v_4 um autovetor generalizado de ordem 4.

Cadeia de autovetores generalizados II

Note que um autovetor generalizado não é invariante com a multiplicação por escalar, mas a cadeia de autovetores associada a um bloco de Jordan é invariante com a multiplicação por escalar.

O cálculo da matriz de transformação de similaridade Q passa pela determinação da forma de Jordan, que pressupõe precisão na determinação dos autovalores. Como conseqüência, trata-se de um método não robusto numericamente. No Matlab, o comando `[Q,Ah]=Jordan(A)` retorna a matriz de transformação Q e a forma de Jordan $\hat{A}$.

Exemplo 1.21

A matriz de transformação de similaridade Q do Exemplo 1.16 pode ser calculada pelo seguinte procedimento.

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b - d & = & 0 \\ 2a + b - 2c - d & = & 0 \\ b - d & = & 0 \\ -2a + b + 2c - d & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} a & b & a & b \end{bmatrix}'$$

Note que com a escolha de a e b pode-se determinar uma base (de dimensão 2) para o espaço nulo de M, o que está de acordo com o fato de que a forma de Jordan possui dois blocos. A escolha de a e b é feita a partir das demais equações da cadeia de autovetores generalizados.

Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f - h & = & a \\ 2e + f - 2g - h & = & b \\ f - h & = & a \\ -2e + f + 2g - h & = & b \end{array} \right.$$

Isto é, v_1 pertence ao espaço nulo e ao *range* de M. Para que exista v_2, tem-se $a = b$ e portanto

$$v_1 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \end{bmatrix}' \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} e & f & e & f - a \end{bmatrix}'$$

Note que, se $a \neq b$, não existe v_2, a cadeia associada tem tamanho 1 e o autovetor associado ao bloco J_1 pode ser escolhido como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$$

Os autovetores generalizados v_2 e v_3 devem satisfazer

$$Mv_3 = v_2 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \\ e \\ f - a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} q - s & = & e \\ 2p + q - 2r - s & = & f \\ q - s & = & e \\ -2p + q + 2r - s & = & f - a \end{array} \right.$$

Portanto,

$$v_1 = \begin{bmatrix} a & a & a & a \end{bmatrix}' \ , \ v_2 = \begin{bmatrix} e & e + a/2 & e & e - a/2 \end{bmatrix}' \ , \ v_3 = \begin{bmatrix} p & q & p - a/4 & q - e \end{bmatrix}'$$

Note que não existe um v_4 tal que

$$Mv_4 = v_3 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ p - a/4 \\ q - e \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u - x & = & p \\ 2t + u - 2v - x & = & q \\ u - x & = & p - a/4 \\ -2t + u + 2v - x & = & q - e \end{array} \right.$$

pois $a \neq 0$. Assim, a cadeia é dada por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}' \ , \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}' \ , \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}'$$

e a matriz Q é

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo I

Exemplo 1.22

Para o cálculo da matriz de transformação de similaridade Q do Exemplo 1.19, tem-se

$$M = (A - 2\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -16 & 32 & -24 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b - 2a & = & 0 \\ c - 2b & = & 0 \\ d - 2c & = & 0 \\ -16a + 32b - 24c + 6d & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} a & 2a & 4a & 8a \end{bmatrix}'$$

Como a dimensão do espaço nulo de M é um, v_1 é o único autovetor e a forma de Jordan tem um único bloco J_4. Escolhendo $a = 1$,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}'$$

tem-se

$$Mv_2 = v_1 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} e \\ 2e+1 \\ 4e+4 \\ 8e+12 \end{bmatrix}$$

Escolhendo $e = 0$,

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix}'$$

tem-se

$$Mv_3 = v_2 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} p \\ 2p \\ 4p+1 \\ 8p+6 \end{bmatrix}$$

Escolhendo $p = 0$,

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}'$$

tem-se

$$Mv_4 = v_3 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad v_4 = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 4t \\ 8t+1 \end{bmatrix}$$

Exemplo III

Escolhendo $t = 0$,

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

Assim,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.23

Para calcular a matriz Q do Exemplo 1.17, tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b - d = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} a & b & c & a+b \end{bmatrix}'$$

Como a dimensão do espaço nulo de M é três, são três blocos de Jordan. Portanto um dos blocos é de tamanho 2 e os outros dois são de tamanho 1. De fato, $M^2 = 0$. Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a+b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e + f - h & = & a \\ 0 & = & b \\ 0 & = & c \\ e + f - h & = & a + b \end{cases}$$

Exemplo II

resultando em

$$v_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a \end{bmatrix}' \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} e & f & g & e+f-a \end{bmatrix}'$$

Assim, Q pode ser escolhido

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.24

Calculando Q do Exemplo 1.18, tem-se

$$M = (A - 4\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + 2c - d & = & 0 \\ -2c & = & 0 \\ a + b - d & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & a + b \end{bmatrix}'$$

Como a dimensão do espaço nulo de M é dois, são dois blocos de Jordan. Como $M^2 = 0$, são dois blocos de tamanho dois. Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \quad \Rightarrow \quad M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ a + b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} e + f + 2g - h & = & a \\ -2g & = & b \\ e + f - h & = & a + b \end{array} \right.$$

Exemplo II

resultando em

$$v_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & a+b \end{bmatrix}' \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} e & f & -b/2 & e+f-a-b \end{bmatrix}'$$

Assim, Q pode ser escolhido

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.25 (Não robustez da forma de Jordan não diagonal)

Considere $0 < \varepsilon \ll 1$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que A é praticamente diagonal, em função da precisão numérica utilizada. Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$ (matriz triangular) e

$$M = (A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad M^2 = 0 \quad , \quad Mv_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

implicando que a forma de Jordan é do tipo J_2 (não diagonal). Escolhendo

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Mv_2 = v_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} c \\ \varepsilon^{-2} \end{bmatrix}$$

Escolhendo $c = 0$, tem-se

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} \quad , \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Não robustez da forma de Jordan não diagonal II

e, conferindo,

$$J_2 = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Não robustez da forma de Jordan diagonal I

Exemplo 1.26 (Não robustez da forma de Jordan diagonal)

Considere $0 < \varepsilon \ll 1$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que A é praticamente não diagonal, em função da precisão numérica utilizada. Os autovalores são $\lambda_1 = 1+\varepsilon$, $\lambda_2 = 1-\varepsilon$ e a forma de Jordan é diagonal. Assim,

$$M_1 = (A-(1+\varepsilon)\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 1 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon \end{bmatrix} \quad , \quad M_1 v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} a \\ \varepsilon a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$M_2 = (A-(1-\varepsilon)\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad , \quad M_2 v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} a \\ -\varepsilon a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix} \quad , \quad Q^{-1} = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^{-1} \\ 1 & -\varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

Exemplo – Não robustez da forma de Jordan diagonal II

Conferindo,

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = 0.5\begin{bmatrix}1 & \varepsilon^{-1}\\ 1 & -\varepsilon^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \varepsilon^{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \varepsilon & -\varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\varepsilon & 0\\ 0 & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

A forma de Jordan facilita a descrição de equações de estado que possuem modos próprios especificados.

Exemplo 1.27

Para escolher matrizes A, c e v_0 tais que o sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv \quad , \; v(0) = v_0$$

produza a saída $y(t) = 3t^2 \exp(-2t)$, pode-se utilizar a forma de Jordan. Necessariamente, a matriz A deve possuir o autovalor -2 com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1, ou seja, a forma de Jordan deve conter o bloco

$$J_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(J_3 t) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma possível solução é dada por

$$A = J_3 \; , \; v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}' \quad \Rightarrow \quad v(t) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix}'$$

$\Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Note que outras matrizes, inclusive de dimensões maiores, poderiam ser usadas para gerar o mesmo sinal $y(t)$. A opção apresentada é a de menor dimensão.

Exemplo

Exemplo 1.28

A escolha de A, c e v_0 para que o sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv \quad , \quad v(0) = v_0$$

produza a saída $y(t) = 5\exp(3t) + 8t\exp(-2t)$ implica em

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & t\exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-2t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(3t) \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ou

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Considere as equações de estado e de saída do sistema SISO

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad y = cv + dx \tag{4}$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$sV(s) - v_0 = AV(s) + bX(s) \quad , \quad Y(s) = cV(s) + dX(s)$$

sendo $V(s) = \mathscr{L}\{v(t)\}$, $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$.

Portanto,

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

A função de transferência é dada por $(v_0 = 0)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d$$

Exemplo 1.29

Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

Computando $(s\text{I} - A)^{-1}$ por Cayley-Hamilton, tem-se

$$(s\text{I} - A)^{-1} = \rho_0(s)\text{I} + \rho_1(s)A$$

com $\rho_0(s)$ e $\rho_1(s)$ obtidos das equações

$$(s+1)^{-1} = \rho_0(s) - \rho_1(s) \quad , \quad (s+2)^{-1} = \rho_0(s) - 2\rho_1(s)$$

$$\rho_0(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad , \quad \rho_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Exemplo II

$$(s\mathsf{I}-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

Para a entrada $X(s) = 1/s$ (degrau unitário), tem-se

$$Y(s) = c(s\mathsf{I}-A)^{-1}(v_0 + bX(s)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}(s\mathsf{I}-A)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/s \end{bmatrix} = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1/2}{s+2}$$

Considere novamente o sistema SISO (4) cuja equação de estado é dada por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0$$

Multiplicando ambos os lados por $\exp(-At)$ e reagrupando, tem-se

$$\exp(-At)\dot{v} - \exp(-At)Av = \frac{d}{dt}\Big(\exp(-At)v\Big) = \exp(-At)bx$$

Integrando de 0 a t, tem-se

$$\exp(-At)v(t) - v_0 = \int_0^t \exp(-A\beta)bx(\beta)d\beta = \int_0^{+\infty} \exp(-A\beta)bx(\beta)u(t-\beta)d\beta$$

Multiplicando por $\exp(At)$ e considerando $x(t) = x(t)u(t)$, tem-se

$$v(t) = \underbrace{\exp(At)v_0}_{v_{\text{en}}(t)} + \underbrace{\Big(\exp(At)u(t)\Big) * \big(bx(t)u(t)\big)}_{v_{\text{cin}}(t)}$$

Observe as contribuições isoladas devido à entrada e devido à condição inicial.

Exemplo 1.30

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad v(0) = v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

cujos autovalores são -1 e -2. Computando $\exp(At)$ por Cayley-Hamilton, tem-se

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A$$

com $\rho_0(t)$ e $\rho_1(t)$ obtidos das equações

$$\exp(-t) = \rho_0(t) - \rho_1(t) \quad , \quad \exp(-2t) = \rho_0(t) - 2\rho_1(t)$$

$$\Rightarrow \qquad \rho_0(t) = 2\exp(-t) - \exp(-2t) \quad , \quad \rho_1(t) = \exp(-t) - \exp(-2t)$$

Exemplo II

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 2\exp(-t) - \exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) \\ -2\exp(-t) + 2\exp(-2t) & -\exp(-t) + 2\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

A resposta à entrada nula $v_{\text{en}}(t)$ é dada por

$$v_{\text{en}}(t) = \exp(At)v_0 = \begin{bmatrix} 2\exp(-t) - \exp(-2t) \\ -2\exp(-t) + 2\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

e a resposta à condição inicial nula $v_{\text{cin}}(t)$ para $x(t) = u(t)$ (degrau unitário) é

$$v_{\text{cin}}(t) = (\exp(At)u(t)) * (bu(t)) = (\exp(At)bu(t)) * u(t) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \exp(-t) - \exp(-2t) \\ -\exp(-t) + 2\exp(-2t) \end{bmatrix} u(t) \right) * u(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - \exp(-t) + 0.5\exp(-2t) \\ \exp(-t) - \exp(-2t) \end{bmatrix}$$

A solução $v(t)$ é dada por

$$v(t) = v_{\text{en}}(t) + v_{\text{cin}}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + \exp(-t) - 0.5\exp(-2t) \\ -\exp(-t) + \exp(-2t) \end{bmatrix} u(t)$$

Em termos da saída $y(t)$, tem-se

$$y = \big(0.5 + \exp(-t) - 0.5\exp(-2t)\big)\, u(t)$$

Considere novamente o sistema SISO cuja equação de estado é dada por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad y = cv + dx$$

sendo $x(t)$ solução da equação de estado homogênea

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \quad , \quad x = \bar{c}\bar{v}$$

A solução $v(t)$ do sistema original não homogêneo pode ser obtida a partir da solução do sistema homogêneo dado por

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} \quad , \quad \tilde{v}(0) = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \tilde{c}\tilde{v}$$

com

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.31

Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

com a entrada $x(t) = 1$. Portanto,

$$\dot{\bar{v}} = 0\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = 1 \ , \ x = \bar{c}\bar{v} = 1\bar{v}$$

Exemplo II

Assim,

$$\exp(\tilde{A}t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2\exp(-t) - \exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) & -\exp(-t) + 0.5\exp(-2t) + 0.5 \\ 2\exp(-2t) - 2\exp(-t) & -\exp(-t) + 2\exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \exp(\tilde{A}t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \exp(-t) - 0.5\exp(-2t) + 0.5$$