

EA616 - Análise Linear de Sistemas

Estabilidade

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2018

A estabilidade de um sistema pode ser caracterizada em termos da **relação entrada-saída** (BIBO estabilidade) ou em termos das **variáveis de estado** (pontos de equilíbrio).

Um sistema é BIBO estável (*Bounded-Input Bounded-Output*) se a saída é limitada para toda entrada limitada.

$$|x(t)| < b \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < +\infty$$

Além disso, um sistema linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente se a resposta ao impulso do sistema for absolutamente integrável.

Propriedade 1 (Função de transferência BIBO estável)

Se um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência $H(s)$ for BIBO estável, então $s = j\omega$ pertence ao domínio Ω_h , pois

$$|H(s = j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

e também pode-se mostrar (Capítulo 7) que um sistema é BIBO estável se e somente se a resposta ao impulso for absolutamente integrável.

Propriedade 2 (Função de transferência racional causal BIBO estável)

Um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência racional

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \Omega_h = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > \sigma\}, \quad \sigma = \max_k \operatorname{Re}(\lambda_k)$$

é BIBO estável se e somente se todos os pólos λ_k (isto é, raízes de $D(s) = 0$) tiverem parte real negativa.

Prova: autovalores com parte real negativa garantem que a resposta causal ao impulso

$$h(t) = \sum_{k=1}^m a_k g_k(t), \quad g_k(t) = t^{r_k} \exp(\lambda_k t) u(t), \quad 0 \leq r_k \leq m$$

é absolutamente integrável.

Definição 1 (Polinômio Hurwitz)

Um polinômio $D(p)$ que possui todas as raízes com parte real negativa é chamado de polinômio Hurwitz.

Propriedade 3

Uma condição necessária para que um polinômio $D(p)$ de grau m , com $\alpha_m > 0$, seja Hurwitz, é que todos os demais m coeficientes sejam positivos.

Prova:

$$D(p) = \alpha_m p^m + \alpha_{m-1} p^{m-1} + \alpha_{m-2} p^{m-2} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad (\alpha_m > 0)$$

$$D(p) = \alpha_m \prod_k (p + a_k) \prod_k (p^2 + 2b_k p + b_k^2 + c_k^2)$$

As raízes reais são $-a_k$ e as complexas são $-b_k \pm jc_k$. Portanto, se

$$a_k > 0 \quad , \quad b_k > 0$$

então todos os coeficientes do polinômio $D(p)$ são positivos.

Exemplo 1.1

A Propriedade 3 é uma condição apenas necessária. Por exemplo, o polinômio

$$p^3 + p^2 + 11p + 51 = (p + 3)(p - 1 + j4)(p - 1 - j4) = (p + 3)(p^2 - 2p + 17)$$

possui todos os coeficientes positivos, mas não é Hurwitz.

Propriedade 4 (Expansão de Stieltjes)

O teste do sinal da parte real das raízes de um polinômio pode ser feito por expansão de Stieltjes

$$\frac{D_m(p)}{D_{m-1}(p)} = \sigma_1 p + \frac{1}{\sigma_2 p + \frac{1}{\sigma_3 p + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\sigma_{m-1} p + \frac{1}{\sigma_m p}}}}}$$

sendo $D_m(p)$ e $D_{m-1}(p)$ polinômios obtidos a partir do polinômio $D(p)$, dados por

$$D_m(p) = \alpha_m p^m + \alpha_{m-2} p^{m-2} + \dots, \quad D_{m-1}(p) = \alpha_{m-1} p^{m-1} + \alpha_{m-3} p^{m-3} + \dots$$

Todas as raízes de $D(p) = 0$ possuem parte real negativa se e somente se $\sigma_k > 0$, $k = 1, \dots, m$.

Exemplo 1.2

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

Note que a condição necessária (todos os coeficientes positivos) é satisfeita.

$$\frac{D_4(p)}{D_3(p)} = \frac{p^4 + 3p^2 + 1}{p^3 + 2p} =$$

Exemplo 1.2

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

Note que a condição necessária (todos os coeficientes positivos) é satisfeita.

$$\frac{D_4(p)}{D_3(p)} = \frac{p^4 + 3p^2 + 1}{p^3 + 2p} = p + \frac{r_2(p) = p^2 + 1}{p^3 + 2p}$$

Propriedade 5 (Determinantes de Hurwitz)

O polinômio de grau m , $\alpha_m > 0$ dado por

$$D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k$$

possui todas as raízes com parte real negativa **se e somente se** os determinantes $\det(\Delta_k)$ (menores principais líderes de Δ_m) forem maiores que zero para $k = 1, \dots, m$, com

$$\Delta_1 = [\alpha_{m-1}] \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para $m = 4$, tem-se

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Note que Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 são as submatrizes de dimensão 1, 2 e 3 da diagonal principal começando no canto superior esquerdo. Note também que, se o determinante de Δ_3 for maior do que zero, a condição $\det(\Delta_4) = \det(\Delta_3)\alpha_0 > 0$ ocorre se e somente se $\alpha_0 > 0$.

Exemplo 1.4

Para $m = 1$, $p + \alpha_0$ possui raiz negativa se e somente se $\det(\Delta_1) = \alpha_0 > 0$.

Para $m = 2$, o polinômio

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_2 =$$

Exemplo 1.4

Para $m = 1$, $p + \alpha_0$ possui raiz negativa se e somente se $\det(\Delta_1) = \alpha_0 > 0$.

Para $m = 2$, o polinômio

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

possui raízes com parte real negativa se e somente se

$$\det(\Delta_1) = \alpha_1 > 0 \quad , \quad \det(\Delta_2) = \alpha_1 \alpha_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 > 0$$

Para $m = 3$, o polinômio

$$p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_3 =$$

Exemplo 1.4

Para $m = 1$, $p + \alpha_0$ possui raiz negativa se e somente se $\det(\Delta_1) = \alpha_0 > 0$.

Para $m = 2$, o polinômio

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

possui raízes com parte real negativa se e somente se

$$\det(\Delta_1) = \alpha_1 > 0 \quad , \quad \det(\Delta_2) = \alpha_1 \alpha_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 > 0$$

Para $m = 3$, o polinômio

$$p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

possui raízes com parte real negativa se e somente se

$$\det(\Delta_1) = \alpha_2 > 0 \quad , \quad \det(\Delta_2) = \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_0 > 0 \quad , \quad \alpha_0 > 0$$

Exemplo 1.5

Considere novamente o polinômio $D(p) = (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$, que é Hurwitz pois

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\Delta_1) = 4, \det(\Delta_2) = 20, \det(\Delta_3) = 64, \det(\Delta_4) = 64$$

A [tabela de Routh](#)¹ sistematiza o teste de Hurwitz sem o cálculo explícito dos determinantes, representando uma alternativa à expansão de Stieltjes.

¹Edward John Routh, matemático canadense 1831-1907.

Propriedade 6 (Tabela de Routh)

Considere o polinômio

$$\alpha_5 p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, \dots, 5$$

Todas as raízes possuem parte real negativa *se e somente se* todos os elementos da Tabela 1 forem positivos ou, equivalentemente, se todos os elementos da primeira coluna forem positivos. A ocorrência de um zero ou de um número negativo implica que o polinômio não é Hurwitz (ou seja, não possui todas as raízes com parte real negativa).

O resultado (em termos do sinal da parte real das raízes) não se altera se uma linha da tabela for multiplicada por um número positivo.

Tabela de Routh

p^5	α_5	α_3	α_1
p^4	α_4	α_2	α_0
p^3	$\beta_3 = \frac{(\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_5)}{\alpha_4}$	$\beta_1 = \frac{(\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_0 \alpha_5)}{\alpha_4}$	
p^2	$\gamma_2 = \frac{(\alpha_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_4)}{\beta_3}$	$\gamma_0 = \alpha_0$	
p^1	$\delta_1 = \frac{(\beta_1 \gamma_2 - \gamma_0 \beta_3)}{\gamma_2}$		
p^0	$\epsilon_0 = \alpha_0$		

Tabela: Tabela de Routh-Hurwitz.

Note que o elemento da linha associada a p^0 é sempre igual a α_0

Exemplo 1.6

O polinômio

$$p^5 + 8p^4 + 25p^3 + 40p^2 + 34p + 12$$

possui raízes com parte real negativa, pois a tabela de Routh é dada por

Exemplo 1.6

O polinômio

$$p^5 + 8p^4 + 25p^3 + 40p^2 + 34p + 12$$

possui raízes com parte real negativa, pois a tabela de Routh é dada por

p^5	1	25	34
p^4	8	40	12
p^3	20	$65/2$	
p^2	27	12	
p^1	$1275/54$		
p^0	12		

De fato, as raízes de $D(p) = 0$ (obtidas pelo Matlab) são

$$-1, -2, -3, -1 + j, -1 - j$$

Exemplo 1.7

Considere novamente o polinômio do Exemplo 1.6, dado por

$$p^5 + 8p^4 + 25p^3 + 40p^2 + 34p + 12 \Rightarrow D_5(p) = p^5 + 25p^3 + 34p, \\ D_4(p) = 8p^4 + 40p^2 + 12$$

A expansão fornece

$$\frac{D_5(p)}{D_4(p)} = \frac{p^5 + 25p^3 + 34p}{8p^4 + 40p^2 + 12} = \frac{1}{8}p + \frac{r_3(p) = 20p^3 + (65/2)p}{D_4(p)}$$

$$\frac{D_4(p)}{r_3(p)} = \frac{8p^4 + 40p^2 + 12}{20p^3 + (65/2)p} = \frac{8}{20}p + \frac{r_2(p) = 27p^2 + 12}{r_3(p)}$$

$$\frac{r_3(p)}{r_2(p)} = \frac{20p^3 + (65/2)p}{27p^2 + 12} = \frac{20}{27}p + \frac{r_1(p) = (1275/54)p}{r_2(p)}$$

$$\frac{r_2(p)}{r_1(p)} = \frac{27p^2 + 12}{(1275/54)p} = \frac{1458}{1275}p + \frac{r_0(p) = 12}{r_1(p)}$$

$$\frac{r_1(p)}{r_0(p)} = \frac{(1275/54)p}{12} = \frac{1275}{648}p$$

Colocando na forma final da expansão, tem-se

$$\frac{D_5(p)}{D_4(p)} = \frac{1}{8}p + \frac{1}{\frac{2}{\frac{5}{\frac{20}{27}p + \frac{1458}{1275}p + \frac{1}{\frac{1}{648}p}}}}$$

e portanto o polinômio tem raízes com parte real negativa. É interessante notar que os valores de σ_k , $k = 1, \dots, 5$ têm relação com os valores da primeira coluna da tabela de Routh, isto é, σ_1 é o elemento da linha 1 dividido pelo da linha 2, σ_2 é o da linha 2 pela linha 3, e assim sucessivamente.

Note também que os demais valores da tabela aparecem nos coeficientes dos polinômios obtidos como resto das divisões.

Note que a segunda e a terceira linhas da Tabela 1 definem o polinômio de grau 4

$$\alpha_4 p^4 + \beta_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \beta_1 p + \alpha_0$$

cuja tabela de Routh-Hurwitz reproduz a Tabela 1 (suprimida a primeira linha). Essa recorrência permite o enunciado da seguinte propriedade.

Propriedade 7 (Teste de Routh-Hurwitz (G. Meinsma, 1995))

O polinômio

$$D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, \dots, m$$

é Hurwitz se e somente se o polinômio de grau $m-1$

$$R_{m-1}(p) = D(p) - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} p D_{m-1}(p)$$

for Hurwitz. Por recorrência, define-se um algoritmo para testar se um polinômio é Hurwitz.

Exemplo 1.8

Considere novamente o polinômio $D(p) = (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$, que é Hurwitz. De fato,

$$D(p) = \frac{1}{4}p(4p^3 + 4p) + \underbrace{4p^3 + 5p^2 + 4p + 1}_{R_3(p)}$$

$$R_3(p) = \frac{4}{5}p(5p^2 + 1) + \underbrace{5p^2 + (16/5)p + 1}_{R_2(p)}$$

$$R_2(p) = \frac{25}{16}p((16/5)p) + \underbrace{(16/5)p + 1}_{R_1(p)}$$

e, como $R_1(p)$ é Hurwitz, os polinômios $R_2(p)$, $R_3(p)$ e $D(p)$ também o são.

A tabela de Routh pode também informar o número de raízes com parte real positiva.

Propriedade 8

Se não ocorrer nenhum zero na primeira coluna da tabela de Routh, o número de mudanças de sinal na primeira coluna é igual ao número de raízes do polinômio com parte real positiva. A ocorrência de um zero indica que o polinômio não é Hurwitz e a tabela não pode ser completada. Nesses casos, duas técnicas podem ser utilizadas:

- (1) trocar o zero por ε , completar a tabela e estudar o sinal dos coeficientes quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $\varepsilon \rightarrow 0^-$ (número distinto de trocas de sinal para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $\varepsilon \rightarrow 0^-$ indica raiz com parte real nula);*
- (2) estudar o polinômio $D(1/p)p^m$ (isto é, o polinômio definido pelos coeficientes lidos na ordem inversa), que possui o mesmo número de raízes com parte real positiva que $D(p)$, pois se λ_k , $k = 1, \dots, m$ são as raízes de $D(p)$, tem-se*

$$D(1/p)p^m = \prod_{k=1}^m (1/p - \lambda_k)p = \prod_{k=1}^m (1 - \lambda_k p)$$

cujas raízes são $1/\lambda_k$. Note que se para raízes complexas, por exemplo, $\lambda = \alpha + j\beta$, tem-se $1/\lambda = (\alpha - j\beta)/(\alpha^2 + \beta^2)$ e portanto o sinal da parte real não se altera.

Exemplo 1.9

Considere o polinômio

$$D(p) = p^5 + p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 3p + 15$$

A tabela de Routh é dada por

p^5	1	2	3
p^4	1	2	15
p^3	ε	-12	
p^2	$(2\varepsilon + 12)/\varepsilon$	15	
p^1	$-12 - 15\varepsilon^2/(2\varepsilon + 12)$		
p^0	15		

Exemplo II

Quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, os sinais da primeira coluna são +, +, +, +, - e + e quando $\varepsilon \rightarrow 0^-$, os sinais da primeira coluna são +, +, -, -, - e +. Nos dois casos, ocorrem duas trocas de sinal, indicando a existência de duas raízes com parte real positiva. De fato, as raízes são (aproximadamente)

$$-1.70, -0.68 \pm j1.71, 1.03 \pm j1.24$$

O mesmo resultado pode ser obtido pela análise de $p^m D(1/p)$, dado por

$$15p^5 + 3p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 1$$

cuja tabela de Routh é

p^5	15	2	1
p^4	3	2	1
p^3	-8	-4	
p^2	0.5	1	
p^1	12		
p^0	1		

Exemplo 1.10

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 3p + 2$$

A tabela de Routh é dada por

p^4	1	3	2
p^3	3	3	
p^2	2	2	

Exemplo 1.10

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 3p + 2$$

A tabela de Routh é dada por

p^4	1	3	2
p^3	3	3	
p^2	2	2	
p^1	ε		
p^0	2		

Neste caso, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ não implica em mudança de sinal e $\varepsilon \rightarrow 0^-$ implica em duas trocas, indicando a existência de raiz com parte real nula. De fato, as raízes são

$$-1, -2, \pm j$$

A estabilidade do estado (ou estabilidade interna) é definida pelo comportamento das trajetórias do vetor de estados para entrada constante (em geral nula) e condições iniciais em torno do ponto de equilíbrio (estabilidade local).

Considere o sistema autônomo

$$\dot{v} = f(v)$$

cujos pontos de equilíbrio são dados por

$$f(\bar{v}) = 0$$

Um ponto de equilíbrio pode ser estável (assintoticamente ou não) ou instável.

Estabilidade de um ponto de equilíbrio

Definição 2 (Estabilidade de um ponto de equilíbrio)

O ponto de equilíbrio \bar{v} é estável se, para $\varepsilon > 0$, existir $\alpha(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|v(0) - \bar{v}\| < \alpha(\varepsilon), \quad \forall v(0) \quad \Rightarrow \quad \|v(t) - \bar{v}\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Definição 3 (Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio)

O ponto de equilíbrio \bar{v} é assintoticamente estável se for estável e, além disso, se existir $\alpha > 0$ tal que

$$\|v(0) - \bar{v}\| < \alpha, \quad \forall v(0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \bar{v}$$

Note que, pela definição, existe sempre uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio que é um **domínio de atração**, ou seja, um domínio no espaço de estados para o qual toda trajetória iniciada em seu interior permanece confinada e tende assintoticamente para o ponto de equilíbrio.

Propriedade 9 (Estabilidade assintótica de sistema linear)

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A for negativa, pois a solução do sistema linear é dada por

$$v(t) = \exp(At)v(0)$$

que é composta pelos modos próprios associados às raízes de $\Delta(\lambda) = 0$. As raízes $\Delta(\lambda) = 0$ são os autovalores da matriz A .

Note que se nenhum autovalor é nulo, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema e, portanto, se a origem é assintoticamente estável, então o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Propriedade 10 (Relação com BIBO estabilidade)

Considere o sistema linear invariante no tempo SISO descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

Então

- A função de transferência é dada por

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

- Todo pólo de $H(s)$ é também autovalor de A e, portanto, a estabilidade assintótica **implica em** BIBO estabilidade.
- Nem sempre todos os autovalores de A são pólos de $H(s)$, pois pode haver cancelamentos de zeros e pólos (não controlabilidade, não observabilidade ou ambos). Portanto, a BIBO estabilidade **não necessariamente implica em** estabilidade assintótica do estado.
- Para sistemas controláveis e observáveis, a BIBO estabilidade implica em estabilidade assintótica, pois todos os autovalores de A são pólos do sistema.

Propriedade 11

Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt} \psi(v) < 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Exemplo 1.11

O sistema escalar

$$\dot{v} = -v^3$$

é assintoticamente estável em $\Omega = \mathbb{R}$ (portanto é globalmente assintoticamente estável), pois para $\psi(v) = v^2$,

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \neq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = 2v\dot{v} = -2v^4 < 0 \quad \forall v \neq 0$$

De fato, para $v(0) > 0$, tem-se

$$\frac{dv}{v^3} = -dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}d(v^{-2}) = dt$$

e portanto

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2tv^2(0)}} v(0)$$

Exemplo 1.12 (Domínio de atração)

Considere o sistema não-linear dado por

$$\dot{v}_1 = v_2 \quad (1)$$

$$\dot{v}_2 = -v_1 + \frac{1}{3}v_1^3 - v_2 \quad (2)$$

A função de Lyapunov

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \frac{3}{4}v_1^2 - \frac{1}{12}v_1^4 + \frac{1}{2}v_1v_2 + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{4}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_1v_2 + \frac{1}{2}v_2^2 \\ &= \frac{1}{4}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) + \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{>0} \quad (3) \end{aligned}$$

tem derivada temporal

$$\dot{\psi}(v) = -\frac{1}{2}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) - \frac{1}{2}v_2^2$$

Exemplo – Domínio de atração II

Pode ser verificado que $\psi(v) > 0$ e $\dot{\psi}(v) < 0$ para todo $v_2 \neq 0$ e para $v_1 \neq 0$ tal que $1 - \frac{1}{3}v_1^2 > 0$, ou seja, para v pertencente ao domínio

$$\Omega = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3} \right\} - \{0\}$$

Portanto, pela Propriedade 11 (Lyapunov), a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e existe um domínio de atração em torno de $(0,0)$.

Note, no entanto, que Ω não é um domínio de atração. Como ilustrado no plano de fase da Figura 1, existem trajetórias que, iniciadas dentro do domínio Ω (e, portanto, com $\dot{\psi}(v) < 0$), acabam saindo. Fora do domínio Ω , não há garantias de que a derivada da função de Lyapunov será negativa. Como conclusão, Ω não é uma estimativa do domínio de atração do ponto de equilíbrio $v = 0$.

Exemplo – Domínio de atração III

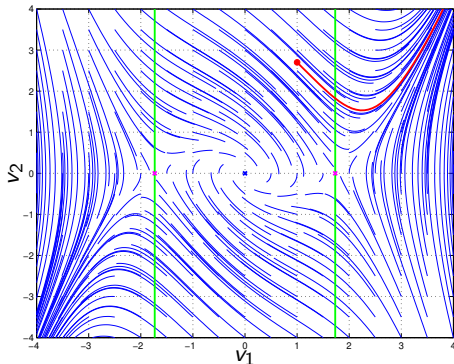


Figura: Plano de fase para o sistema (1)-(2). Em traço mais grosso, uma trajetória iniciada no ponto $v(0) = [1 \ 2.7]'$ que sai do domínio Ω e diverge.

Exemplo – Domínio de atração IV

O comportamento local do sistema pode ser estudado em torno dos pontos de equilíbrio $(0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},0)$, mostrados na Figura 1. O jacobiano do sistema é dado por

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + v_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

resultando em representações linearizadas em torno dos pontos de equilíbrio dadas por

$$(0,0), \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v, \quad \lambda_{1,2} = -0.5 \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{estável}$$

$$(-\sqrt{3},0) \text{ e } (\sqrt{3},0), \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} v, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \quad \text{instável}$$

Estimativas da região de atração podem ser obtidas por meio de conjuntos positivamente invariantes, como por exemplo

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathbb{R}^n : \psi(v) \leq c\}$$

quando \mathcal{D} é limitado e está contido em Ω (domínio para o qual a derivada da função de Lyapunov é negativa). Uma trajetória iniciada no instante t_0 em \mathcal{D} permanece dentro do conjunto para todo $t \geq t_0$ e, como $\mathcal{D} \subset \Omega$, $\dot{\psi}(v) < 0$ garante a convergência assintótica para a origem.

Para a função de Lyapunov (3), pode-se procurar pelo maior valor de c tal que $\psi(v) \leq c$ dentro da região Ω , resultando em $c \approx 1.124$. A Figura 2 mostra as regiões no plano (v_1, v_2) para as quais $\psi(v) = 1.124$. Note que apenas a região contida no intervalo $-\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3}$ pode ser usada como uma estimativa do domínio de atração $\mathcal{D} \subset \Omega$. O verdadeiro domínio de atração pode ser obtido por simulações exaustivas das equações diferenciais (1)-(2), resultando no conjunto de condições iniciais mostrado na Figura 3.

Exemplo – Domínio de atração VI

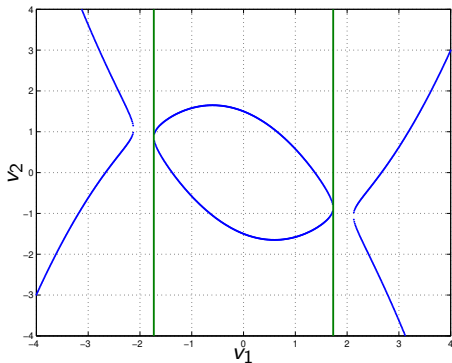


Figura: Regiões no plano de fase do sistema (1)-(2) para as quais $\psi(v) = 1.124$ com $\psi(v)$ dada em (3). A estimativa da região de atração está no intervalo $-\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3}$.

Exemplo – Domínio de atração VII

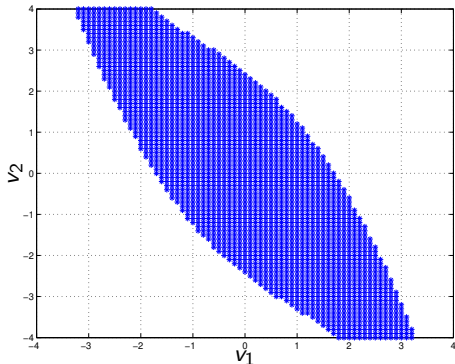


Figura: Domínio de atração para o sistema (1)-(2), isto é, conjunto das condições iniciais que resultam em trajetórias estáveis.

Exemplo – Domínio de atração VIII

Observe que a Propriedade 11 depende da escolha da função $\psi(v)$ e é apenas suficiente para a estabilidade assintótica. Frequentemente, busca-se para $\psi(v)$ uma forma quadrática dada por

$$\psi(v) = v' P v$$

sendo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva, isto é, matriz com todos os autovalores reais e positivos.

A derivada da função de Lyapunov é dada por

$$\dot{\psi}(v) = \dot{v}' P v + v' P \dot{v} = f(v)' P v + v' P f(v)$$

e o teste de estabilidade consiste na análise do sinal de $\dot{\psi}(v)$, isto é, o sistema é assintoticamente estável se $\dot{\psi}(v) < 0, \forall v \neq 0$.

Exemplo 1.13 (Circuito RLC)

Considere o circuito mostrado na Figura 4 cujas equações são

$$v_1 = C \dot{v}_2 + \frac{v_2}{R} \quad ; \quad x = L \dot{v}_1 + v_2$$

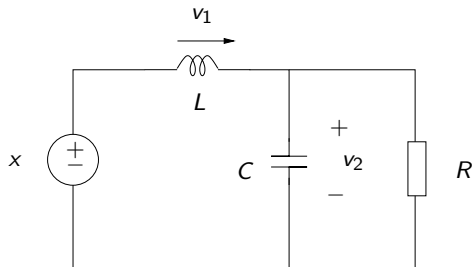


Figura: Circuito RLC.

Exemplo – Circuito RLC III

Para condições iniciais nulas, o sistema é linear e invariante no tempo. Os pontos de equilíbrio podem ser obtidos das equações de estado impondo-se que as derivadas das variáveis de estado são nulas. Para a entrada $x = 0$ (sistema autônomo), tem-se como ponto de equilíbrio $v_1 = 0$, $v_2 = 0$.

Observe que, para parâmetros R , L e C positivos, a energia armazenada no circuito (magnética e elétrica) decresce assintoticamente.

$$\psi = \frac{1}{2}Lv_1^2 + \frac{1}{2}Cv_2^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = Lv_1\dot{v}_1 + Cv_2\dot{v}_2$$

A função energia $\psi(v_1, v_2)$ é uma função de Lyapunov do sistema, pois é positiva para $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Além disso, substituindo as derivadas, obtém-se

$$\dot{\psi} = -\frac{v_2^2}{R} < 0 \quad \text{para } v_2 \neq 0 \text{ e } v_1 \text{ qualquer}$$

indicando que o sistema é assintoticamente estável (tende ao ponto de equilíbrio $v_1 = v_2 = 0$). Observe que a derivada da energia é a potência dissipada no resistor.

Definindo $y = v_2$ e usando o operador derivada no tempo $p = \frac{d}{dt}$, tem-se a relação entrada-saída

$$\left(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}\right)y = \frac{1}{LC}x$$

que é BIBO estável.

Propriedade 12 (Desigualdade de Lyapunov)

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$A'P + PA < 0 \quad (\text{definida negativa})$$

Prova: a suficiência é consequência da escolha da função de Lyapunov

$$\psi(v) = v'Pv \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}(v) = \dot{v}'Pv + v'P\dot{v} = v'(A'P + PA)v$$

e, portanto,

$$\psi(v) > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) < 0, \quad v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P > 0, \quad A'P + PA < 0$$

Note que $A'P + PA$ é uma matriz simétrica.

Desigualdade de Lyapunov II

A determinação de uma matriz simétrica definida positiva P que satisfaz a desigualdade acima pode ser feita pela solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

com $Q = Q' > 0$ arbitrária, por exemplo, igual à matriz identidade.

Teorema 1 (Lyapunov)

Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Prova:

Primeiramente, mostra-se que se A possui autovalores com parte real negativa, então a solução é única, simétrica e definida positiva.

Desigualdade de Lyapunov III

- Como A e A' possuem os mesmos autovalores e todos têm parte real negativa, não existem dois deles tais que a soma seja nula. Portanto, a solução P é única (utiliza-se uma propriedade da equação de Sylvester).
- A solução pode ser expressa como

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A' t) Q \exp(At) dt$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} A'P + PA &= \int_0^{+\infty} \left(A' \exp(A' t) Q \exp(At) + \exp(A' t) Q \exp(At) A \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\exp(A' t) Q \exp(At) \right) dt = \exp(A' t) Q \exp(At) \Big|_{t=0}^{+\infty} = -Q \end{aligned}$$

pois, como A tem autovalores com parte real negativa, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(At) = 0$.

- Como Q é simétrica, P também o é.

Desigualdade de Lyapunov IV

- Como Q é definida positiva, existe R não singular tal que $Q = R'R$. Então, P é definida positiva, pois

$$v'Pv = \int_0^{+\infty} v' \exp(A't)R'R \exp(At)v dt = \int_0^{+\infty} \|R \exp(At)v\|^2 dt > 0, \quad \forall v \neq 0$$

Para completar a demonstração, prova-se que se $P = P' > 0$, então A possui todos os autovalores com parte real negativa.

Pré multiplicando a equação de Lyapunov por $(v^*)'$ e pós multiplicando por v , com v autovetor de A associado ao autovalor λ , tem-se

$$(v^*)'A'Pv + (v^*)'PAv = (\lambda^* + \lambda)(v^*)'Pv = 2\text{Re}(\lambda)(v^*)'Pv = -(v^*)'Qv$$

Como $(v^*)'Pv$ e $(v^*)'Qv$ são reais positivos, tem-se $\text{Re}(\lambda) < 0$.

A propriedade a seguir fornece procedimentos para determinar se uma matriz é definida positiva.

Propriedade 13 (Matriz definida positiva)

Uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se e somente se qualquer uma das condições for verificada.

- $v'Pv > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$;
- Todos os autovalores são positivos;
- Todos os menores principais líderes são positivos;
- Existe $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular tal que $P = R'R$.

Note que uma condição necessária para que uma matriz seja definida positiva é que todos os elementos da diagonal sejam positivos.

Uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida negativa se $-Q$ for definida positiva.

Propriedade 14 (Estabilidade de sistema linear)

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A for negativa ou nula, e os blocos de Jordan associados aos autovalores com parte real nula forem de ordem igual a um. Note que, nesse caso, a trajetória $v(t)$ é sempre limitada, qualquer que seja a condição inicial $v(0)$. Alguns livros utilizam os termos “estabilidade no sentido de Lyapunov” ou “sistema marginalmente estável”.

Caso contrário, isto é, se houver algum autovalor com parte real positiva ou blocos de Jordan de ordem maior que um associados aos autovalores de parte real nula, o sistema é instável.

Exemplo 1.16

Considere o sistema (oscilador senoidal ideal)

$$\ddot{y} + y = 0 \quad , \quad v_1 = y \quad , \quad v_2 = \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} v$$

cuja forma de Jordan é diagonal (autovalores distintos), $AQ = Q\hat{A}$, dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

O sistema é estável, pois os blocos de Jordan associados aos autovalores de parte real nula têm tamanho um. De fato, a solução é dada por

$$v(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix} v(0)$$

Note que o sistema não é assintoticamente estável.

Exemplo 1.17

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v$$

é estável (mas não assintoticamente), pois possui um autovalor igual a -1 e outro igual a 0 (portanto, associado a um bloco de Jordan de tamanho um). De fato, a solução é

$$v_1(t) = v_1(0) \quad , \quad v_2(t) = \exp(-t)v_2(0)$$

Exemplo 1.18

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

é instável, pois possui um bloco de Jordan de ordem dois associado ao autovalor 0. De fato, a solução é

$$v_1(t) = v_1(0) + tv_2(0) \quad , \quad v_2(t) = v_2(0)$$