

EA616 - Análise Linear de Sistemas

Equações a Diferenças

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2018

Definição 1 (Equações a Diferenças)

Equações envolvendo seqüências enumeráveis e seus deslocamentos são denominadas equações a diferenças.

Exemplo 1.1 (Filtro passa-alta)

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para a entrada $x[n] = (-1)^n$, a saída é $y[n] = (-1)^n$. Para $x[n] = 1^n$, tem-se $y[n] = 0$.

Exemplo 1.2 (Filtro passa-baixa)

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para $x[n] = (-1)^n$, a saída é $y[n] = 0$. Para $x[n] = 1^n$, tem-se $y[n] = 1^n$.

Exemplo 1.3

População anual de peixes em um lago (em termos percentuais)

$$y[n+1] - ay[n](1 - y[n]) = x[n], \quad 0 \leq y[0] \leq 1$$

sendo a um parâmetro real que representa as condições ambientais do lago.

Equações a diferenças lineares descrevem sistemas lineares, isto é, sistemas para os quais vale o princípio da superposição. Os sistemas descritos nos exemplos 1.1 e 1.2 são lineares, enquanto que o Exemplo 1.3 descreve um sistema não-linear.

Equações a diferenças lineares com **coeficientes constantes** e **condições iniciais nulas** descrevem sistemas lineares invariantes no tempo.

Exemplo 1.4 (Somador)

Para $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$, a resposta ao impulso é

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

sendo $u[n]$ a função degrau. Note que o somador pode ser descrito pela equação a diferenças de primeira ordem

$$y[n+1] = y[n] + x[n+1], \quad y[0] = y_0 \text{ condição inicial}$$

Utilizando o operador de deslocamento p , tem-se $(p-1)y[n] = px[n]$.

Equações a diferenças lineares a coeficientes constantes podem ser resolvidas por **substituição sistemática**, por meio da **transformada Z** ou pelo **método dos coeficientes a determinar**.

Exemplo 1.5

A equação homogênea a diferenças de primeira ordem

$$y[n+1] = \rho y[n] \quad , \quad y[0] = 1, \rho \in \mathbb{R}$$

pode ser resolvida por substituição sistemática, resultando em $y[n] = \rho^n$

e vale para todo n , de $-\infty$ a $+\infty$. Observe que a seqüência $y[n]$ não possui transformada Z, pois

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\rho/z)^k$$

não converge para nenhum z . O artifício utilizado para resolver essa classe de equações a diferenças utilizando transformada Z consiste em alterar o problema impondo que $y[n] = 0$ para $n < 0$, e que $y[n]$ satisfaz a equação para $n \geq 0$. Dessa forma, $\mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$ existe e é dada por

$$\mathcal{Z}\{y[n]u[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]u[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho/z)^k = \frac{z}{z-\rho} \quad , \quad |z| > |\rho|$$

Resolução por Transformada Z

Três propriedades da transformada Z são relevantes para a resolução das equações a diferenças lineares a coeficientes constantes.

Propriedade 1 (Deslocamento à Esquerda (avanço))

$$\mathcal{L}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \mathcal{L}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k}, \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Exemplo 1.6

Para $y[n] = y[n]u[n]$ e $x[n] = x[n]u[n]$, tem-se

$$y[n+2] + \alpha_1 y[n+1] + \alpha_0 y[n] = \beta_1 x[n+1] + \beta_0 x[n]$$

Resolução por Transformada Z

Três propriedades da transformada Z são relevantes para a resolução das equações a diferenças lineares a coeficientes constantes.

Propriedade 1 (Deslocamento à Esquerda (avanço))

$$\mathcal{L}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \mathcal{L}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k}, \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Exemplo 1.6

Para $y[n] = y[n]u[n]$ e $x[n] = x[n]u[n]$, tem-se

$$y[n+2] + \alpha_1 y[n+1] + \alpha_0 y[n] = \beta_1 x[n+1] + \beta_0 x[n]$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1] + \alpha_1 (zY(z) - zy[0]) + \alpha_0 Y(z) = \beta_1 (zX(z) - zx[0]) + \beta_0 X(z)$$

$$(z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0) Y(z) = (\beta_1 z + \beta_0) X(z) + (z^2 + \alpha_1 z) y[0] + zy[1] - \beta_1 zx[0]$$

A função de transferência $H(z)$ é dada por ($y[0] = y[1] = 0$ e $x[0] = 0$)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

Propriedade 2 (Combinatória)

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+m}{m} a^n u[n] \right\} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |z| > |a|$$

Exemplo 1.7

$$\mathcal{Z} \{ na^n u[n] \} = \frac{z^2}{(z-a)^2} - \frac{z}{z-a} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

pois

Propriedade 2 (Combinatória)

$$\mathcal{L} \left\{ \binom{n+m}{m} a^n u[n] \right\} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |z| > |a|$$

Exemplo 1.7

$$\mathcal{L} \{ na^n u[n] \} = \frac{z^2}{(z-a)^2} - \frac{z}{z-a} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

pois

$$\mathcal{L} \left\{ \binom{n}{0} a^n u[n] \right\} = \mathcal{L} \{ a^n u[n] \} = \frac{z}{z-a}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \binom{n+1}{1} a^n u[n] \right\} = \mathcal{L} \{ (n+1)a^n u[n] \} = \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

Exemplo 1.8

$$\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a| \text{ pois}$$

Exemplo 1.8

$$\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a| \text{ pois}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n+2}{2} a^n u[n]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{(n+2)(n+1)}{2} a^n u[n]\right\} = \frac{z^3}{(z-a)^3}$$

Propriedade 3 (Combinatória com Deslocamento)

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |z| > |a|$$

A propriedade é utilizada no cálculo de transformada Z *inversa* a partir de frações parciais.

Exemplo 1.9 (Soma aritmética-geométrica)

A soma aritmética-geométrica $y[n] = \sum_{k=0}^n k\rho^k$, pode ser obtida pela resolução da equação a diferenças $y[n+1] - y[n] = (n+1)\rho^{n+1}$, $y[0] = 0$, fornecendo

$$zY(z) - zy[0] - Y(z) = \frac{\rho z^2}{(z-\rho)^2}, \text{ Portanto, para } \rho \neq 1, \text{ tem-se}$$

$$Y(z) = \frac{\rho z^2}{(z-1)(z-\rho)^2}, \quad |z| > \max\{|\rho|, 1\}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\rho z}{(z-1)(z-\rho)^2} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho} + \frac{c}{(z-\rho)^2}$$

cujos coeficientes são $a = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$, $b = \frac{-\rho}{(1-\rho)^2}$, $c = \frac{-\rho^2}{(1-\rho)}$. Portanto,

$$y[n] = au[n] + b\rho^n u[n] + c \binom{n}{1} \rho^{n-1} u[n] = (a + b\rho^n + c n \rho^{n-1}) u[n] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} (1 - (n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}) u[n]$$

Para $\rho = 1$, o problema se reduz ao de soma aritmética.

Exemplo 1.10 (Seqüência de Fibonacci)

A seqüência de Fibonacci é uma seqüência de números inteiros em que cada elemento é obtido pela soma dos dois anteriores. A equação descreve uma população de casais de coelhos, composta de casais adultos e filhotes. Cada casal adulto gera um casal de filhotes todo mês, e o casal de filhotes torna-se fértil (adulto) com dois meses de vida. No mês n , $a[n]$ é o número de casais adultos e $f[n]$ é o número de casais de filhotes com um mês de vida. Supondo que não ocorram mortes, tem-se

$$a[n+1] = a[n] + f[n] \quad , \quad f[n+1] = a[n]$$

Denominando $y[n]$ qualquer uma das variáveis de estado, obtém-se a equação a diferenças

$$y[n+2] = y[n+1] + y[n] \quad , \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1$$

Usando o operador p , tem-se

$$D(p)y[n] = (p^2 - p - 1)y[n] = 0$$

Exemplo 1.11 (Seqüência de Fibonacci)

sendo $D(p)$ o polinômio característico da equação a diferenças. Aplicando a transformada Z, tem-se

$$z^2(Y(z) - y[0] - y[1]z^{-1}) = z(Y(z) - y[0]) + Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

As raízes do denominador (ou seja, raízes de $D(p) = 0$) são

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} = \frac{a_1}{z - \lambda_1} + \frac{a_2}{z - \lambda_2}$$

cujos coeficientes são

$$a_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

resultando em

$$y[n] = (a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n) u[n] \approx a_1 \lambda_1^n u[n] \quad \text{para } n \text{ grande, pois } |\lambda_2| < 1$$

Exemplo 1.12 (Equação a diferenças com $N(p) \neq 1$)

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2] + 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + x[n] \quad , \quad y[0] = 1, y[1] = 2$$

Aplicando a transformada Z (para $x[n] = x[n]u[n]$ e $y[n] = y[n]u[n]$), tem-se

Exemplo 1.12 (Equação a diferenças com $N(p) \neq 1$)

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2] + 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + x[n] \quad , \quad y[0] = 1, y[1] = 2$$

Aplicando a transformada Z (para $x[n] = x[n]u[n]$ e $y[n] = y[n]u[n]$), tem-se

$$(z^2 + 5z + 6)Y(z) = (3z + 1)X(z) - 3zx[0] + (z^2 + 5z)y[0] + zy[1]$$

e, para $x[n] = (-2)^n u[n]$, substituindo-se as condições iniciais, tem-se

Exemplo 1.12 (Equação a diferenças com $N(p) \neq 1$)

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2] + 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + x[n] \quad , \quad y[0] = 1, y[1] = 2$$

Aplicando a transformada Z (para $x[n] = x[n]u[n]$ e $y[n] = y[n]u[n]$), tem-se

$$(z^2 + 5z + 6)Y(z) = (3z + 1)X(z) - 3zx[0] + (z^2 + 5z)y[0] + zy[1]$$

e, para $x[n] = (-2)^n u[n]$, substituindo-se as condições iniciais, tem-se

$$(z^2 + 5z + 6)Y(z) = \frac{(3z + 1)z}{z + 2} + z^2 + 4z \quad \Rightarrow \quad \frac{(3z + 1)z}{(z + 2)^2(z + 3)} + \frac{z^2 + 4z}{(z + 2)(z + 3)}$$

Decompondo $Y(z)/z$ em frações parciais, tem-se

Exemplo 1.12 (Equação a diferenças com $N(p) \neq 1$)

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2] + 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + x[n] \quad , \quad y[0] = 1, y[1] = 2$$

Aplicando a transformada Z (para $x[n] = x[n]u[n]$ e $y[n] = y[n]u[n]$), tem-se

$$(z^2 + 5z + 6)Y(z) = (3z + 1)X(z) - 3zx[0] + (z^2 + 5z)y[0] + zy[1]$$

e, para $x[n] = (-2)^n u[n]$, substituindo-se as condições iniciais, tem-se

$$(z^2 + 5z + 6)Y(z) = \frac{(3z + 1)z}{z + 2} + z^2 + 4z \Rightarrow \frac{(3z + 1)z}{(z + 2)^2(z + 3)} + \frac{z^2 + 4z}{(z + 2)(z + 3)}$$

Decompondo $Y(z)/z$ em frações parciais, tem-se

$$Y(z) = -\frac{8z}{z + 3} + \frac{8z}{z + 2} - \frac{5z}{(z + 2)^2} - \frac{z}{z + 3} + \frac{2z}{z + 2}$$

e, aplicando a transformada Z inversa e agrupando,

$$y[n] = (-9(-3)^n + 10(-2)^n - 5n(-2)^{n-1})u[n]$$

Exemplo 1.13 (Resposta ao impulso)

A resposta ao impulso do sistema (pressupõe condições iniciais nulas)

$$y[n+1] - \rho y[n] = \delta[n] \Rightarrow (p - \rho)y[n] = \delta[n], y[0] = 0$$

pode ser obtida pela transformada Z, isto é, obtém-se a função de transferência

Exemplo 1.13 (Resposta ao impulso)

A resposta ao impulso do sistema (pressupõe condições iniciais nulas)

$$y[n+1] - \rho y[n] = \delta[n] \Rightarrow (\rho - \rho)y[n] = \delta[n], y[0] = 0$$

pode ser obtida pela transformada Z, isto é, obtém-se a função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{z - \rho} \Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z(z - \rho)} = \frac{-1/\rho}{z} + \frac{1/\rho}{z - \rho}$$

e a resposta ao impulso é dada pela transformada Z inversa de $H(z)$

$$h[n] = (-1/\rho)\delta[n] + (1/\rho)\rho^n u[n] = \rho^{n-1} u[n-1]$$

Equações a diferenças lineares com coeficientes constantes podem ser resolvidas pelo método dos coeficientes a determinar.

Considere a equação a diferenças homogênea

$$D(p)y[n] = 0 \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k \quad (1)$$

com $\alpha_m = 1$ e condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear autônomo.

Observe que a equação é uma restrição linear (combinação linear das funções $y[n]$, $y[n+1]$, \dots , $y[n+m]$) e portanto a solução $y[n]$ deve necessariamente estar em um espaço de dimensão m .

Definição 2 (Independência Linear)

Um conjunto de sinais $\{y_k[n], k = 1, \dots, m\}$ é linearmente independente se e somente se

$$\sum_{k=1}^m c_k y_k[n] = 0, \forall n \Rightarrow c_k = 0, k = 1, \dots, m$$

Definição 3 (Base)

A combinação linear de um conjunto de m sinais $y_k[n]$, isto é,

$$y[n] = \sum_{k=1}^m c_k y_k[n]$$

com escalares $c_k \in \mathbb{C}$ gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número $r \leq m$ de sinais linearmente independentes. Qualquer conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é uma base para esse espaço.

Exemplo 1.14

Os sinais

$$y_1[n] = 1, y_2[n] = n, y_3[n] = n^2$$

são linearmente independentes. De fato,

$$c_1 y_1[n] + c_2 y_2[n] + c_3 y_3[n] = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0, \text{ pois } \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Propriedade 4 (Independência Linear)

$$y_1[n] = \lambda_1^n, y_2[n] = \lambda_2^n$$

são linearmente independentes se e somente se

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Note que $a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0, \forall n$, implica

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Propriedade 5 (Deslocamento de auto-função)

As funções

$$y_1[n] = \lambda^n, \quad y_2[n] = y_1[n+k]$$

são linearmente dependentes, pois

$$y_2[n] = \lambda^k \lambda^n$$

Propriedade 6 (Modo próprio)

A seqüência $y[n] = \lambda^n$ é solução da equação (1) se λ é raiz de $D(\lambda) = 0$ (equação característica), pois

$$D(p)\lambda^n = D(\lambda)\lambda^n = 0$$

Observe que a solução é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.15

Para $D(p) = p^2 - p - 1$, tem-se

$$D(p)\lambda^n = (p^2 - p - 1)\lambda^n = \lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = (\lambda^2 - \lambda - 1)\lambda^n$$

Propriedade 7 (Modos próprios)

Se as m raízes λ_k de $D(\lambda) = 0$ forem *distintas*, então

$$y[n] = \sum_{k=1}^m a_k \lambda_k^n$$

é solução da equação (1) pois λ_k satisfaz $D(\lambda_k) = 0$, $k = 1, \dots, m$ e os modos próprios λ_k^n , $k = 1, \dots, m$ são linearmente independentes.

Propriedade 8 (Raiz dupla)

Se λ é raiz dupla da equação característica $D(\lambda) = 0$, então λ^n e $n\lambda^n$ são modos próprios da equação (1).

Prova:

$$\begin{aligned} D(p)(n\lambda^n) &= \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k (n\lambda^n) = \sum_{k=0}^m \alpha_k (n+k) \lambda^{n+k} = \\ &= n\lambda^n \sum_{k=0}^m \alpha_k \lambda^k + \lambda^{n+1} \sum_{k=0}^m \alpha_k k \lambda^{k-1} = n\lambda^n D(\lambda) + \lambda^{n+1} \frac{d}{dp} D(p) \Big|_{p=\lambda} = 0 \end{aligned}$$

pois $D(\lambda) = 0$ e $\frac{d}{dp} D(p) \Big|_{p=\lambda} = 0$ quando λ é raiz dupla de $D(\lambda)$.

Exemplo 1.16

Para $D(p) = (p - \lambda)^2$, tem-se

$$(p - \lambda)^2 \lambda^n = 0$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} (p - \lambda)^2 n \lambda^n &= (p^2 - 2\lambda p + \lambda^2) n \lambda^n = (n+2)\lambda^{n+2} - 2\lambda(n+1)\lambda^{n+1} + \lambda^2 n \lambda^n = \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2) n \lambda^n + 2(\lambda - \lambda)\lambda^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Propriedade 9 (Raiz múltipla)

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios da equação (1).

Propriedade 10 (Solução da Homogênea)

A solução da equação homogênea (1) de ordem m é dada pela combinação linear dos seus m modos próprios, considerando as eventuais multiplicidades das raízes características.

Exemplo 1.17

Considere a equação a diferenças

$$D(\rho)y[n] = (\rho - \rho)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 1$$

A raiz da equação característica é $\lambda = \rho$, e portanto

Propriedade 9 (Raiz múltipla)

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios da equação (1).

Propriedade 10 (Solução da Homogênea)

A solução da equação homogênea (1) de ordem m é dada pela combinação linear dos seus m modos próprios, considerando as eventuais multiplicidades das raízes características.

Exemplo 1.17

Considere a equação a diferenças

$$D(\rho)y[n] = (\rho - \rho)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 1$$

A raiz da equação característica é $\lambda = \rho$, e portanto

$$y[n] = a\rho^n$$

sendo a o coeficiente a determinar. Das condições iniciais, $a = y[0] = 1$.

Exemplo 1.18

Considere a equação a diferenças do Exemplo 1.10 (Fibonacci)

$$D(p)y[n] = (p^2 - p - 1)y[n] = 0 = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \quad , \quad y[1] = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

A equação característica é $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$. A solução

Exemplo 1.18

Considere a equação a diferenças do Exemplo 1.10 (Fibonacci)

$$D(p)y[n] = (p^2 - p - 1)y[n] = 0 = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \quad , \quad y[1] = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

A equação característica é $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$. A solução é dada por

$$y[n] = a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n$$

Das condições iniciais, $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $a_2 = \frac{-\sqrt{5}}{5}$

Exemplo 1.19

Considere a equação a diferenças, com $\rho \neq 1$,

$$D(\rho)y[n] = (\rho - 1)(\rho - \rho)^2 y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \quad , \quad y[1] = \rho \quad , \quad y[2] = \rho + 2\rho^2$$

A solução é

Exemplo 1.19

Considere a equação a diferenças, com $\rho \neq 1$,

$$D(\rho)y[n] = (\rho - 1)(\rho - \rho)^2 y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \quad , \quad y[1] = \rho \quad , \quad y[2] = \rho + 2\rho^2$$

A solução é

$$y[n] = a_1(1)^n + a_2\rho^n + a_3n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}(1-\rho^n) - \frac{\rho}{1-\rho}n\rho^n$$

Exemplo 1.20

Considere a equação a diferenças, com $\alpha \neq 0$,

$$D(\rho)y[n] = (\rho - 1)(\rho - (1 + \alpha))y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = M \quad , \quad y[1] = M(1 + \alpha) - \gamma$$

A solução é

$$y[n] = a_1(1)^n + a_2(1 + \alpha)^n = \frac{\gamma}{\alpha} + \left(M - \frac{\gamma}{\alpha}\right)(1 + \alpha)^n$$

Equação não homogênea

Considere a equação a diferenças não homogênea

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k \quad , \quad N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k \quad (2)$$

com $\alpha_m = 1$ e condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear não autônomo.

A equação (2) pode ser resolvida pelo método dos coeficientes a determinar sempre que $x[n]$ for solução de uma equação diferencial homogênea dada por

$$\bar{D}(p)x[n] = 0$$

O polinômio $\bar{D}(p)$ define os modos do espaço que contém $x[n]$. Portanto, multiplicando a equação (2) dos dois lados por $\bar{D}(p)$, tem-se a equação homogênea

$$\bar{D}(p)D(p)y[n] = N(p)\bar{D}(p)x[n] = 0$$

que contém os modos próprios de $D(p)$ e os modos forçados de $\bar{D}(p)$.

As condições iniciais que permitem a solução desse sistema aumentado são as originais acrescidas de tantas quanto for o grau de $\bar{D}(p)$, obtidas por substituição sistemática na equação (2).

Exemplo 1.21

Considere a equação a diferenças da soma geométrica

$$y[n+1] - y[n] = \rho^{n+1} \quad , \quad y[0] = 1$$

Neste caso

Exemplo 1.21

Considere a equação a diferenças da soma geométrica

$$y[n+1] - y[n] = \rho^{n+1} \quad , \quad y[0] = 1$$

Neste caso

$$D(p) = p - 1 \quad \text{e} \quad \bar{D}(p) = p - \rho \quad , \quad y[0] = 1 \quad , \quad y[1] = 1 + \rho$$

pois a entrada $x[n] = \rho\rho^n$ está no espaço de dimensão 1 descrito por um modo próprio associado à raiz ρ . A condição $y[1] = 1 + \rho$ foi obtida substituindo-se $y[0]$ na equação original.

Exemplo 1.22

Considere a equação a diferenças da soma aritmética-geométrica

$$y[n+1] - y[n] = (n+1)\rho^{n+1} \quad , \quad y[0] = 0$$

Neste caso

Exemplo 1.22

Considere a equação a diferenças da soma aritmética-geométrica

$$y[n+1] - y[n] = (n+1)\rho^{n+1} \quad , \quad y[0] = 0$$

Neste caso

$$D(\rho) = (\rho - 1) \quad \text{e} \quad \bar{D}(\rho) = (\rho - \rho)^2 \quad , \quad y[0] = 0 \quad , \quad y[1] = \rho \quad , \quad y[2] = \rho + 2\rho^2$$

pois a entrada $x[n] = (n+1)\rho^{n+1}$ está no espaço de dimensão 2 descrito pelos modos próprios associados à raiz ρ com multiplicidade 2. As condições iniciais $y[1]$ e $y[2]$ foram obtidas da equação original por substituição.

Exemplo 1.23

Considere novamente a equação a diferenças do Exemplo 1.12

$$(p^2 + 5p + 6)y[n] = (3p + 1)x[n] \quad , \quad y[0] = 1, y[1] = 2 \quad , \quad x[n] = (-2)^n$$

Portanto, $\bar{D}(p) = (p + 2)$, $y[2] = 3x[1] + x[0] - 5y[1] - 6y[0] = -21$ e

$$y[n] = 2.5n(-2)^n + 10(-2)^n - 9(-3)^n$$

Note que a solução vale para todo $n \in \mathbb{Z}$ e coincide para $n \geq 0$ com a solução obtida por transformada Z no Exemplo 1.12.

Propriedade 11 (Solução Forçada)

O método dos coeficientes a determinar pode ser aplicado diretamente à equação a diferenças não homogênea (2). Para isso, identificam-se as parcelas *homogênea* e *forçada* (devido à entrada) da solução.

$$y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)(y_h[n] + y_f[n]) = N(p)x[n]$$

$$D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \quad (3)$$

pois $D(p)y_h[n] = 0$. As parcelas homogênea e forçada são dadas por

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^m a_k f_k[n] \quad , \quad y_f[n] = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} b_k g_k[n]$$

sendo $f_k[n]$ os m modos próprios associados a $D(\lambda) = 0$ e $g_k[n]$ os \tilde{m} modos forçados associados a $\bar{D}(\gamma) = 0$, *considerando-se as possíveis multiplicidades com as raízes λ* .

Os coeficientes b_k são obtidos da equação (3) e, em seguida, os coeficientes a_k são obtidos a partir das condições iniciais.

Exemplo 1.24

Considere a equação a diferenças dada por

$$y[n+1] - y[n] = \rho^{n+1} \quad , \quad y[0] = 1 \quad \Rightarrow \quad D(\rho) = \rho - 1 \quad , \quad \bar{D}(\rho) = (\rho - \rho)$$

Para $\rho \neq 1$, tem-se $\lambda = 1$ e $\gamma = \rho$ (raízes distintas). A solução forçada é

$$y_f[n] = b\rho^n \quad \Rightarrow \quad (b\rho - b)\rho^n = \rho^{n+1} \quad , \quad b = \frac{\rho}{\rho - 1}$$

A solução é $y[n] = b\rho^n + a$. Da condição inicial $y[0] = 1$, tem

$$1 = b + a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{1 - \rho}$$

Para $\rho = 1$, ocorre o fenômeno conhecido como ressonância (modo próprio excitado pelo modo da entrada). Neste caso, tem-se

$$\lambda = \gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad y_f[n] = bn1^n \quad , \quad b = 1$$

A solução é (usando-se a condição inicial): $y[n] = bn + a = n + 1$

Exemplo 1.25 (Soma aritmética)

A soma aritmética satisfaz a equação a diferenças

$$y[n+1] - y[n] = n + 1 \quad , \quad y[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad D(p) = p - 1 \quad , \quad \bar{D}(p) = (p - 1)^2$$

Trata-se de uma ressonância dupla, $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Portanto,

$$y_f[n] = b_1 n^2 + b_2 n \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = 0.5$$

A solução é (usando-se a condição inicial)

$$y[n] = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + a = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriedade 12 (Resposta ao Impulso)

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad x[n] = \delta[n] \quad (\text{condições iniciais nulas})$$

A priori, o método dos coeficientes a determinar não poderia ser utilizado para determinar $y[n]$ pois não existe equação a diferenças linear com coeficientes constantes que produza como solução a função $\delta[n]$, isto é, $\delta[n+k]$ é linearmente independente de $\delta[n]$ qualquer que seja $k \neq 0$.

Entretanto, a resposta ao impulso pode ser calculada pelo método dos coeficientes a determinar da seguinte forma. Primeiramente, resolva

$$D(p)f[n] = 1 \quad , \quad (\text{condições iniciais nulas})$$

Por linearidade, tem-se

$$y[n] = N(p)(f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1])$$

Note que a resposta ao degrau é dada por $N(p)f[n]u[n]$.

Exemplo 1.26

Calculando a resposta ao degrau da equação a diferenças

$$(\rho - \rho)y[n] = u[n], \quad y[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad (\rho - \rho)f[n] = 1 \quad (\lambda = \rho, \gamma = 1)$$

$$f[n] = b_1 + a_1\rho^n, \quad b_1 - \rho b_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{1-\rho}, \quad a_1 = -b_1$$

$$y[n] = f[n]u[n] = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} u[n]$$

A resposta ao impulso é

$$y[n] - y[n-1] = \rho^{n-1} u[n-1]$$

Exemplo 1.27

Considere

$$(\rho - 2)(\rho - 3)y[n] = \rho x[n] \quad , \quad x[n] = \delta[n] \quad , \quad (\text{condições iniciais nulas})$$

$$(\rho - 2)(\rho - 3)f[n] = 1 \quad \Rightarrow \quad f[n] = b_1 + a_1 2^n + a_2 3^n \quad , \quad b_1 = 0.5 \quad , \quad a_1 = -1 \quad , \quad a_2 = 0.5$$

A resposta ao degrau é dada por

$$\rho f[n]u[n] = \left(\frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2} 3^{n+1} \right) u[n+1]$$

e a resposta ao impulso é

$$\begin{aligned} y[n] &= \rho f[n]u[n] - \rho f[n-1]u[n-1] = f[n+1]u[n+1] - f[n]u[n] = \\ &= (f[n+1] - f[n])u[n] = (-2^n + 3^n)u[n] \end{aligned}$$

Exemplo II

Note que as respostas ao degrau e ao impulso poderiam ser obtidas por transformada Z.

A resposta ao impulso é a transformada Z inversa de $Y(z)$, ou seja

$$Y(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}, \quad y[n] = (-2^n + 3^n)u[n]$$

e a resposta ao degrau

$$Y(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \frac{z}{z-1} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{-2}{z-2} + \frac{3/2}{z-3} + \frac{1/2}{z-1}$$
$$y[n] = \left(-2(2^n) + \frac{3}{2}(3^n) + \frac{1}{2} \right) u[n]$$